C. Truesdell

Ensayos de Historia de la Mecánica

ESTRUCTURA Y FUNCION

EDITORIAL TECNOS - MADRID

ESTRUCTURA Y FUNCION

El porvenir actual de la Ciencia

Colección dirigida por ENRIQUE TIERNO GALVAN

1. Quentin Gibson: *La lógica de la investigación social.*
2. M. F. Ashley Montagu: *La dirección del desarrollo humano* (2.ª ed.).
3. Gustav Bergmann: *Filosofía de la ciencia.*
4. Christian Bay: *La estructura de la libertad.*
5. Ernest Nagel: *La lógica sin metafísica.*
6. David Hilbert y Wilhelm Ackermann: *Elementos de lógica teórica* (2.ª ed.).
7. Vernon Van Dyke: *Ciencia política: un análisis filosófico.*
8. Karl R. Popper: *La lógica de la investigación científica* (2.ª ed.).
9. R. M. Martin: *Verdad y denotación.*
10. Ernest Gellner: *Palabras y cosas.*
11. C. O. Broad: *El pensamiento científico.*
12. John Hospers: *La conducta humana.*
13. Arthur Pap: *Teoría analítica del conocimiento.*
14. T. C. Schelling: *La estrategia del conflicto.*
15. Richard B. Braithwaite: *La explicación científica.*
16. Milic Capek: *El impacto filosófico de la física contemporánea.*
17. Ros Ashby: *Proyecto para un cerebro.*
18. Hans Reichenbach: *Moderna filosofía de la ciencia.*
19. George Polya: *Matemáticas y razonamiento plausible.*
20. George L. S. Shackle: *Decisión, orden y tiempo.*
21. D. M. Armstrong: *La percepción y el mundo físico.*
22. Ernest Nagel: *Razón soberana.*
23. Max Black: *Modelos y metáforas.*
24. Haskell B. Curry y Robert Feys: *Lógica combinatoria.*
25. Ludwig Wittgenstein: *Los cuadernos azul y marrón.*
26. Abraham Edel: *El método en la teoría ética.*
27. Alfred Landé: *Nuevos fundamentos de la mecánica cuántica.*
28. Jean Ladrière: *Limitaciones internas de los formalismos.*
29. N. Wiener y J. P. Schadé: *Sobre modelos de los nervios, el cerebro y la memoria.*
30. G. H. von Wright: *Norma y acción.* Una investigación lógica.
31. E. Nagel y J. P. Newman: *El teorema de Gödel.*
32. Henry Margenau: *La naturaleza de la realidad física.* Una filosofía de la Física moderna.
33. V. C. Chappell: *El lenguaje común.* Ensayos de filosofía analítica.
34. Alf Ross: *Lógica de las normas.*
35. W. Sellars: *Ciencia, percepción y realidad.*
36. Christian Thiel: *Sentido y referencia en la lógica de Gottlob Frege.*
37. Claude Flament: *Teoría de grafos y estructuras de grupo.*
38. W. y M. Kneale: *El desarrollo de la lógica.*
39. G. E. Hughes y M. J. Cresswell: *Introducción a la lógica modal.*
40. Karl R. Popper: *Conocimiento objetivo.*
41. Gottlob Frege: *Escritos lógico-semánticos.*
42. Stephen C. Kleene: *Introducción a la Metamatemática.*
43. G. Kalinowski: *Lógica del discurso normativo.*
44. J. J. C. Smart: *Entre Ciencia y Filosofía.* Una introducción a la Filosofía de la Ciencia.

ENSAYOS DE HISTORIA DE LA MECANICA

ESTRUCTURA Y FUNCION
EL PORVENIR ACTUAL DE LA CIENCIA

C. Truesdell

ENSAYOS DE HISTORIA DE LA MECANICA

EDITORIAL TECNOS

MADRID

Los derechos para la versión castellana del libro de C. Truesdell
Essays in the History of Mechanics
publicado por Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York
© by Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1968
son propiedad de Editorial Tecnos, S. A.

Traducción por
JUAN CARLOS NAVASCUES HOWARD
Y
ENRIQUE TIERNO PEREZ-RELAÑO

© EDITORIAL TECNOS, S. A., 1975
O'Donnell, 27 - Madrid-9
ISBN: 84-309-0597-9
Depósito legal: M-30.125-1975

Printed in Spain - Impreso en España por Gráficas Lormo - Isabel Méndez, 15 - Madrid-18
en papel Offset editorial de Torras Hostench, S. A.

CARAE · UXORI

CARLOTTAE

QUAM · SOLAM · INTER · MULIERES · SAECULI · SUI
DEAE · TRES
QUAE · OLIM · NUDAE · IDA · PARIDEM · MALUM · POPOSCERUNT
DOTIBUS · SUIS · OMNIBUS · PRAETER · UNAM
LIBERALITER · ET · AEQUALITER
ORNAVERUNT
HUNC · LIBELLUM · INSTAR · DONI
DEDICAT

C. T.

INDICE GENERAL

PREFACIO ..... *Pág.* 13

I. LA MECANICA DE LEONARDO DA VINCI 17

1. Prolegómenos 17
2. Leonardo y la temprana ingeniería 18
3. ¿Realizaba Leonardo experimentos? 21
4. Leonardo y las vigas 26
5. Leonardo y su método de investigación, I 33
6. Leonardo sobre la fuerza y el movimiento 34
7. El nacimiento de la Historia de la Mecánica 37
8. La cinemática y dinámica medievales 41
9. Leonardo y la tradición 43
10. El movimiento uniformemente acelerado en el vacío y sobre el plano inclinado. 45
11. Leonardo y su método de investigación, II 49
12. Ciencia y arte 50
13. Leonardo como matemático 51
14. Perspectiva y movimiento en la pintura de Leonardo 61
15. Leonardo y algunos aspectos generales del movimiento de fluidos 68
16. Leonardo hablando sobre las olas y los remolinos 76
17. Los principios de Leonardo acerca de la continuidad y la circulación 82
18. La fama de Leonardo 85

Reconocimiento 87

II. PROGRAMA PARA EL REDESCUBRIMIENTO DE LA MECANICA RACIONAL DE LA ILUSTRACION 89

1. El *Principia* de Newton (1687) 92
2. El ambiente y los métodos científicos durante la Ilustración 96
3. Los descubrimientos de Jaime Bernoulli 103
4. Primeros intentos de aclarar, extender y organizar los principios de la mecánica 106
5. Las frecuencias propias y los modos simples de sistemas en vibración antes del descubrimiento de las ecuaciones del movimiento 108
6. La mecánica de fluidos antes del descubrimiento de las ecuaciones diferenciales del equilibrio y del movimiento 110
7. Las primeras ecuaciones diferenciales para el movimiento de sistemas 112
8. Formulación definitiva del principio del momento lineal: "los primeros principios de la mecánica" de Euler ("Ecuaciones de Newton") (1750) 114
9. Cuerpos rígidos y la distinción entre masa e inercia 116
10. Las vibraciones y los movimientos ondulatorios desde el punto de vista de las ecuaciones del movimiento 117
11. El concepto de tensión normal y los principios de la hidrodinámica 120
12. Las leyes de la elasticidad y el concepto de tensión de cizalladura 122
13. El principio del momento de la cantidad de movimiento 125
14. La invariancia de las leyes de la mecánica y la *Méchanique Analitique* de Lagrange (1788) 127
15. Recapitulación: experiencia, teoría y experimento durante la Ilustración 132

Reconocimiento 133

Bibliografía 133

III. REACCIONES DE LA MECANICA DEL BARROCO TARDIO A LOS EXITOS, CONJETURAS, ERRORES Y FRACASOS CONTENIDOS EN EL *PRINCIPIA* DE NEWTON 134

1. El *Principia* de Newton, Libro I 134
2. El *Principia* de Newton, Libro II 137
3. Exito y tradición en la mecánica pre-newtoniana 143
4. Un retazo de la obra de los Bernoulli 150
5. Movimiento de un sólido rígido, momento de la cantidad de movimiento, la curva elástica, y las Leyes de la mecánica de Euler 154
6. La *Méchanique Analitique* de Lagrange y reacciones posteriores 165
7. Equívocos decimonónicos acerca de la obra y el programa newtonianos. La postura de Faraday 167
8. El legado de Newton 172

Referencias 174
Nota bibliográfica 174

IV. LA CREACION Y EL DESARROLLO DEL CONCEPTO DE ESFUERZO 175

1. Las leyes del movimiento debidas a Cauchy (1822) 175
2. El tema de esta conferencia 178
3. El papel central de la hidrodinámica de Euler (1750-1755). Lo que logró, lo que oscureció 181
4. El principio de solidifcación de Stevin (1586) 184
5. La tensión de ruptura de Galileo (1638) 189
6. El concepto de tensión en un cable flexible según Pardies y Jaime Bernoulli (1673, 1691-1704) 189
7. Juicios de Leibniz, Jaime Bernoulli y Parent acerca de la variación de la tensión en las fibras de una viga cargada (1684, 1691, 1713) 198
8. Generalizaciones matemáticas de la hidrostática de Arquímedes y Stevin anteriores a las ecuaciones generales (1687-1749) 199
9. Influencias de propiedades constitutivas sobre el concepto general de esfuerzo en la obra de Jaime Bernoulli y Euler acerca de la flexión de barras (1705, 1727, 1779) 204
10. La hidráulica de Daniel Bernoulli, Juan Bernoulli y Euler (1730-1752) 205
11. Los primeros ensayos de una hidrodinámica debidos a Euler y D'Alembert (1745-1749) 211
12. La hidrodinámica de Euler (1750-1766) 214
13. La fuerza cortante resultante y la teoría general de cables deformables de Euler (1771-1774) 217
14. El reconocimiento explícito del esfuerzo cortante por Coulomb (1773) 220
15. Una observación final acerca de Cauchy 222

Nota bibliográfica 222

V. ORIGEN DE LA LEY DEL MOMENTO DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO .. 223

1. La forma normal de la ley del momento de la cantidad de movimiento para los físicos 223
2. Los dos conceptos de la ley del momento de la cantidad de movimiento 226
3. Acerca del hecho de que ni Newton, ni Huygens, ni Lagrange llegaron a publicar nada sobre los dos conceptos 227
4. El trabajo fundamental de Jaime Bernoulli sobre el centro de oscilación (1686-1703) 230
5. Comentarios de Daniel Bernoulli y Euler en el año 1744 acerca de la dependencia e independencia de la ley del momento de la cantidad de movimiento. 234
6. El principio general del momento lineal de Euler (1750) y el descubrimiento de las ecuaciones del movimiento de un cuerpo rígido 238
7. Las leyes fundamentales de la Mecánica de Euler (1775) 240

8. La transición a los newtonianos (1833 hasta la fecha) 243
Apéndice: Puntos de vista recientes acerca de los principios de la mecánica 248
Nota bibliográfica 251

VI. PRIMERAS TEORIAS CINETICAS DE LOS GASES 252

1. El siglo dieciocho 252
2. Herapath (1816-1821) 261
3. Joule y Krönig (1851, 1856) 266
4. Waterston (1843-1846) 269
5. Alabanza a la desorganización de la ciencia 276
Nota bibliográfica 279

VII. REACCIONES DE LA HISTORIA DE LA MECANICA SOBRE LA INVESTIGACION MODERNA 280

1. Proemio 280
2. La elástica de sección óptima 283
3. La elástica de forma deseada una vez cargada 284
4. Métodos de aproximación a las ecuaciones generales 288
5. Los axiomas sobre fuerzas 294
6. Paralelismos del siglo diecisiete con la oscuridad de la termodinámica y la termostática 296
Reconocimiento 302
Referencias 303
Nota bibliográfica 304

VIII. AVANCES RECIENTES EN MECANICA RACIONAL (1956) 305

1. ¿Qué es la mecánica racional? 305
2. Un ejemplo clásico: los teoremas de vorticidad de Helmholtz, Kelvin y Ertel. 309
3. El principio variacional de Reissner en la elasticidad lineal 314
4. El "Principio de St. Venant", según v. Mises y Sternberg 315
5. Grandes deformaciones elásticas 317
6. Viscosidad no lineal y teorías no lineales en general 320
7. Experimento y teoría 324
8. Principios de invariancia 325
9. Teorías dependientes del tiempo para el comportamiento de materiales 325
10. El teorema ergódico de Khinchin 327
11. La relación entre teorías estadísticas y teorías de medios continuos 330
12. Apología 330
Nota bibliográfica 332

INDICE ONOMASTICO 333

INDICE DE MATERIAS 341

PREFACIO

Este tomo recoge mis artículos cortos sobre la historia de la mecánica, algunos de los cuales ya han sido publicados en diversos lugares, otros son revisiones de trabajos anteriores, y todavía otros hasta ahora han sido inéditos. Todos ellos empezaron por ser conferencias, y aquí se imprimen como tales, poco cambiadas desde las últimas veces que las leí ante un público. Aunque los diversos artículos tratan aspectos distintos de la mecánica, no podía evitarse cierta superposición e incluso repetición, dado que la mecánica es una sola ciencia y grande, y a menudo el mismo original sirvió a más de un fin en su desarrollo.

No se incluyen mis tres principales tratados históricos, los cuales se publicaron en Tomos (II) 11_2*, 12, y 13 de* L. Euleri Opera Omnia. *Para simplificar la impresión, también he omitido en su mayor parte referencia detallada a fuentes estudiadas de modo más completo en estos tratados, pero, claro está, he añadido a los textos de las conferencias citas de otras fuentes, algunas notas en respuesta a preguntas que pudiera hacer el lector, y notas bibliográficas al final de cada una.*

Agradezco a la National Science Foundation de los Estados Unidos por su apoyo a este trabajo mediante una donación a la Universidad de Johns Hopkins.

Si estas conferencias hallan alguna aceptación entre los profesionales de la historia de la ciencia, estaré humildemente agradecido por su tolerancia de un libro no concebido para ellos. No obstante su ansiedad de contarnos cómo aprovecharon los científicos del siglo diecisiete su herencia del dieciséis, estos eruditos parecen considerar irrelevante todo lo que pueda pensar un científico de hoy acerca de cualquier aspecto de la ciencia, incluyendo su propia deuda al pasado o reacción en contra del mismo. Tales historiadores me recuerdan a aquellos taxonomistas, acaso de existencia tan sólo legendaria, que son incapaces de reconocer una planta particular a menos de que vean una ramita de la misma, muerta, seca, y pegada a una hoja de papel. Para mí, la ciencia matemática está viva hoy, viva no solamente en sus hojas más lozanas sino también en sus ramas que se extienden hasta el pasado. Conozco hombres jóvenes que han leído los escritos de Gibbs y Kelvin y Cauchy, incluso de Euler y Newton, no con el propósito de adornar un trabajo propio con una referencia temprana, ni de escribir una historia, sino en búsqueda de entendimiento y método, revelados ambos en las palabras directas de gigantes, no en las traducciones hechas por enanos. Para tales hombres, tales científicos de nuestra propia época, se compusieron y se imprimen aquí estas conferencias.

Las revoluciones de guerra mundial y socialismo y mecánica cuántica, por justas, necesarias, y fructíferas que hayan sido, han oscurecido la solidez masiva, la serena confianza de la mecánica clásica. Pero ésta ha resistido, manteniéndose firme detrás de las humeantes neblinas podridas. Estas conferencias cuentan cómo se fundaron algunas partes de la misma. Si puede el lector formar aquí su propia explicación de cómo alcanzó la mecánica clásica una solidez tan masiva y una confianza tan serena que no sólo sobrevivió sino que actualmente incluso florece de nuevo, habré conseguido mi objetivo. Le daré una pista. Aun siendo así que "imaginación, fantasía, e inventiva" son el alma de la investigación matemática, jamás ha habido una revolución en matemática.

C. T.

ENSAYOS DE HISTORIA DE LA MECANICA

Fig. 1. Autorretrato de Leonardo da Vinci (por cortesía de la Biblioteca Nacional de Turín)

I. LA MECANICA DE LEONARDO DA VINCI

1. PROLEGOMENOS

En pleno auge contemporáneo de las llamadas ciencias experimentales, cuyos objetivos, métodos y resultados son rápidamente captados por cualquiera y que tan fácilmente se exponen en los diarios, es un hecho triste pero cierto que las ciencias racionales se van viendo abandonadas y olvidadas, incluso por los estudiosos. Actualmente es frecuente el escuchar en el seno de cualquier comunidad intelectual unas definiciones de la Ciencia y del Conocimiento procedentes de respetables filósofos y científicos las cuales, aplicadas con todo rigor, desterrarían a las matemáticas por completo. No obstante, la tecnología que hoy contemplamos, fascinados mientras va arrastrando a la raza humana hacia su posible destrucción, no es experimental. Tampoco es racional. Más bien, tan inflexible e inexorable como el instinto social de la abeja, la tecnología se limita a multiplicar los resultados experimentales mediante la aplicación repetida y ciega de resultados matemáticos. Los gigantescos ordenadores electrónicos actuales tan sólo son la extrapolación natural de los innumerables tableros de dibujo y reglas de cálculo con los que se diseñaban puentes, ferrocarriles y centrales eléctricas una y dos generaciones atrás. Otras civilizaciones en vano alcanzaron las más altas cimas técnico-culturales; construyeron grandes y deprimentes suburbios e inventaron artefactos para aplastar, herir, y quemar seres humanos a gran escala. Mas sólo la nuestra lo va consiguiendo mediante las matemáticas. Y si por "método experimental" entendemos la utilización de conocimientos obtenidos a partir de la praxis y no por apelación a una autoridad, nuestra civilización no tiene de qué presumir. Tal uso ha sido habitual entre los artesanos y artistas de todas las épocas. La tecnología occidental tan sólo difiere de otras en su aplicación de las matemáticas a las ciencias naturales, en la sustitución del conocimiento artesano por el cálculo.

La tarea principal de la historia de la ciencia y la tecnología es entender esta extraña unión, encontrar su origen, y trazar las líneas de su desarrollo. Hoy en día, siendo así que la historia de la ciencia se ha convertido en una disciplina universitaria, sostenida por cátedras, congresos, revistas, sociedades, comités y subsidios del contribuyente, es decir, se ha profesionalizado, puede resultar sorprendente el comentar que dicha tarea se ha visto aún más enmarañada. Mas, en efecto, la mayoría de los que abogan por una mayor independencia para este campo de estudios son incapaces siquiera de resolver por su cuenta un simple problema de cálculo, ni mucho menos entender un trabajo sobre hidrodinámica publicado hace cien años. La ciencia, pues, queda rebajada al nivel de sus historiadores oficiales, y cualquier científico competente que se atreva a exponer sus propias opiniones acerca de la historia de la ciencia se ve tachado de aficionado e intruso.

El científico que estudie a Leonardo da Vinci de una manera racional atrae sobre sí la indignación general. Ha de enfrentarse con una maraña de resistencias: las habituales falsedades acerca de lo que es la ciencia, las puerilidades tan frecuentes en los libros de texto sobre la historia de la ciencia, aceptadas como dogmas por los

propios científicos, y aún peor, la extremada reverencia hacia Leonardo como genio casi legendario de alcance universal, si bien de logros un tanto difusos. Incluso en el mundo tenebroso de la crítica artística, que no es que se caracterice precisamente por la frialdad y el raciocinio, Leonardo es objeto de una veneración que alcanza límites insospechados. Y pese a que este mundo artístico no es dado a alabar a aquellos científicos a los que se considera que no han sido ante todo artistas, no ha dudado en atribuirle a Leonardo la invención de artefactos tan asombrosos como el submarino, el helicóptero y las lentes de contacto. El único científico que cualquier profano es capaz de nombrar, y ello sin haber oído ni de Newton ni de Leibnitz, es el propio Leonardo. Un ejemplo curioso de esto lo vemos en la propaganda de un reciente libro adulando a Leonardo, en la cual aparece el siguiente comentario del célebre dibujante y caricaturista de máquinas absurdas, Rube Goldberg:

"Como yo también soy inventor, me siento abrumado por los logros de este gran hombre. El predijo todo lo que está ocurriendo en la actualidad... Cuidaré este nuevo libro como un tesoro y me inspiraré en él siempre que quiera dibujar un nuevo artefacto."

No sólo a través de la prensa, sino también mediante libros de intención mucho más seria, se nos ha enseñado a deglutir superlativos como si fueran sedantes. El catedrático que se olvide de destacar su asignatura por encima de todas las demás verá que no se le toma en serio a la hora de los exámenes finales. Lo que actualmente se pide es ciencia en microdosis de fácil ingestión y una cultura de consumo. Ante esto, el sugerir al gran público que los entusiasmos históricos deben ser reemplazados por hechos históricos caería en la más absoluta indiferencia ante el aburrimiento que esto le presupone.

En el cómodo mundo de frases hechas en que vivimos, Leonardo sigue siendo imán para superlativos. Cubrió todos los terrenos del arte y de la razón. A partir de unas pocas pinturas, especialmente de dos o tres cuadros popularísimos desde antaño, ha surgido toda una leyenda sobre lo que podría haber llegado a crear. La publicación de sus cuadernos de apuntes durante la época victoriana conmovió al mundo del arte y despertó el interés de muchas personas hacia sus opiniones sobre la ciencia y la filosofía. Sin embargo, la mayoría de estas personas no sentían ni el menor interés por los trabajos de otros muchos científicos y filósofos. Aun siendo sorprendentes de por sí los bosquejos y diseños de mecanismos de Leonardo, resultan quizás especialmente impresionantes para el científico y el artista contemporáneos; al uno por no estar entrenado para tratar con tecnologías precuánticas y al otro por no estar capacitado siquiera para otorgar un valor científico a estos diseños.

2. LEONARDO Y LA TEMPRANA INGENIERIA

Consideremos la lámina dos, la cual nos muestra bosquejos de cinco bombas de agua y norias, artefactos que, además de sofisticados, son factibles. ¿Observamos aquí el genio de Leonardo profetizando la tecnología de épocas más tardías? En absoluto. En primer lugar, porque no se deben estos dibujos a Leonardo. Su autor es Francesco di Giorgio Martini (1439-1501). Proceden de una obra que se asemeja en mucho a los estudios de Leonardo: es el *Trattato di Architectura*[1],

[1] L. Reti, "Francesco di Giorgio Martini's treatise on engineering and its plagiarists, *Technology and Culture* 4, 287-298 (1963).

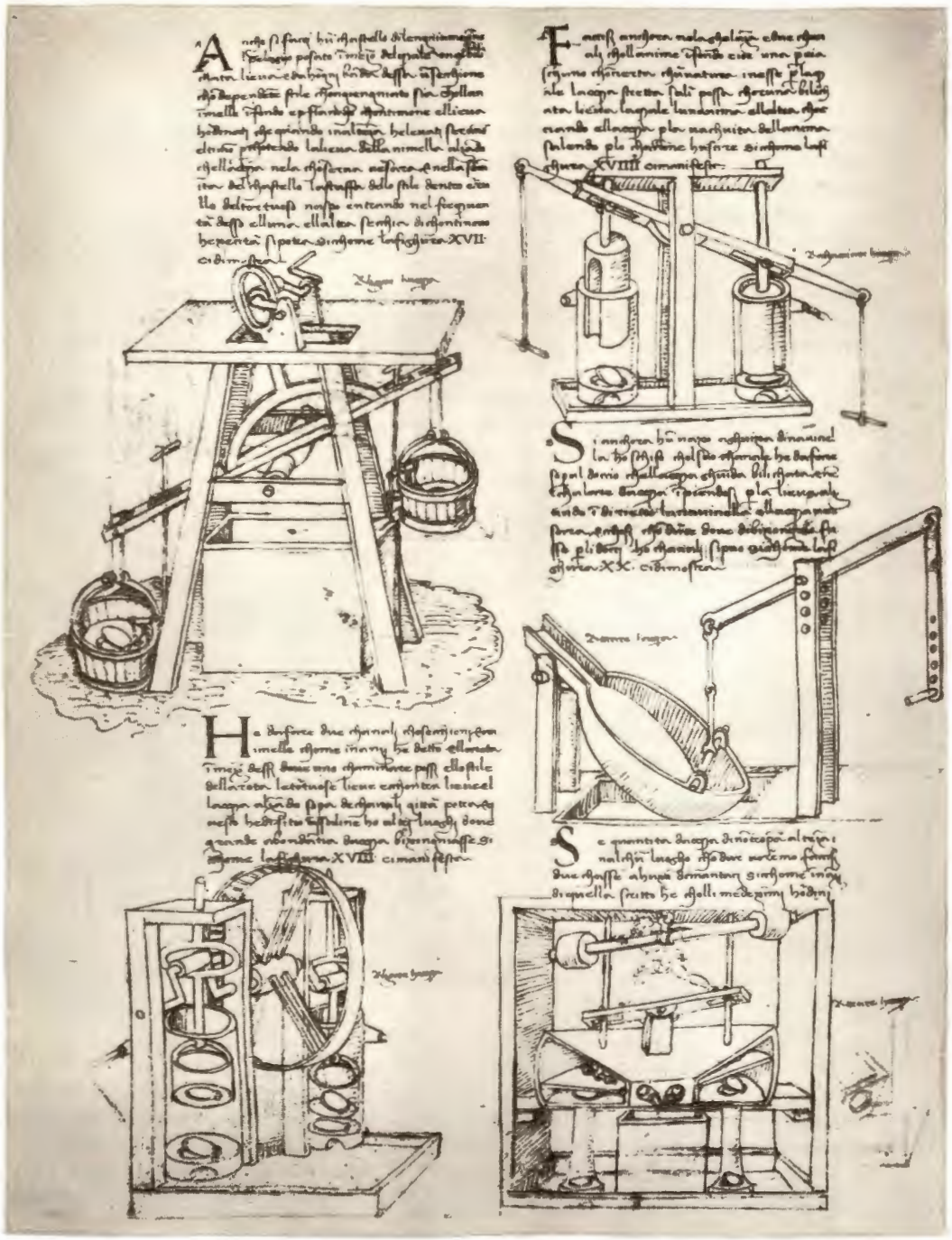


Fig. 2. Página del *Trattato di Architectura* de Francesco di Giorgio Martini, c. 1457. Cod. 148 Bibl. Naz. Torino (ex Duca di Genova), *f.* 47*v.* (por cortesía de la Biblioteca Nacional de Turín)

escrito alrededor de 1475, a poco de haber cumplido Leonardo sus veinte años. En 1490, Leonardo y Martini se fueron a Pavía para colaborar en la construcción de la catedral. Una copia[2] incompleta de esta obra de Martini contiene notas al margen y algunos bosquejos de Leonardo y varios de los artefactos anteriormente atribuidos a él aparecen por primera vez en el libro de Martini.

La existencia de una sola obra de este calibre bastaría para derrumbar la fábula de Leonardo como creador solitario. Tal y como sugiere el número y la gran variedad de máquinas que dibujó, Leonardo se presenta como un recopilador de la impresionante tecnología de su época que además fue capaz de introducir muchos adelantos propios. No es difícil de explicar que hayan quedado tan pocas pruebas de esta tecnología. En primer lugar, la artesanía de la mecánica no era comparable con los estudios humanísticos. Parecería absurdo esperar de los filósofos y matemáticos del siglo XV que tuviesen la misma tendencia que los del XIX a dar una mayor importancia intrínseca a las bombas de agua y a las forjas del herrero que a los efectos de las oraciones y de las configuraciones estelares sobre el destino humano. Todas estas cosas pertenecen a la experiencia del hombre. No hay razón, pues, para pensar que los estudiosos de aquella época concedieran más importancia a unas que a otras; no se les había enseñado en la escuela que bombas y forjas se pueden explicar mediante la razón, mientras que con la religión y la astrología no ocurre así. Las máquinas pertenecen a los mecánicos y a éstos les interesa, por muy cultos que sean, guardar sus secretos. Como Leonardo, Martini fue un mecánico poco común, ya que fue a la vez buen pintor, escultor y arquitecto. Un buen dibujo de una máquina real contiene la misma verosimilitud que el retrato de un ser humano, sin que en ninguno de los dos casos pueda decirse que lo representado es fruto de la imaginación del artista. Así pues, al igual que Leonardo, Martini se queja de que su originalidad no es lo suficientemente apreciada, pero, no obstante, deja bien claro que no es autor de todo lo que ha dibujado:

> "Por tanto y para acabar mi trabajo, voy a presentar en esta última parte algunos artefactos de entre los más comunes, poderosos y útiles, a pesar de haber tomado tantas veces la decisión de no divulgar la estructura de muchas de mis máquinas. Pues el conocimiento que he llegado a adquirir de ellas ha sido a costa de grandes esfuerzos y al sacrificio de mis propios bienes; no es extraño que me muestre remiso a enseñarlos, puesto que en cuanto se conoce un invento, poco queda del secreto. Pero aun esto es un mal menor comparado con el que sigue. Lo peor es que los ignorantes se adornan con los trabajos de otros, usurpando la gloria de inventos que no son suyos. Debido a esto, los esfuerzos de los que verdaderamente saben suelen ser tardíamente reconocidos. Aunque en todas las épocas se ha dado este vicio, es en la nuestra en la que más extendido aparece."

Se conoce tan poco sobre la tecnología de la baja Edad Media como para pronunciarse a favor o en contra de la originalidad de Leonardo como inventor[3], excepto en el caso de aquellos artefactos de funcionamiento claramente imposible que, por tanto, tampoco pudieron ser producto de su época. Lo único que cabe afirmar es que los diseños hechos por Leonardo de algunas máquinas perfectamente capaces de funcionar son los más antiguos de los que han llegado a nosotros. No se

---

[2] Cod. Med. Laur. 361 en la Biblioteca Laurentiana, Florencia.

[3] La vieja referencia standard, actualmente anticuada del todo, es el texto de F. M. Feldhaus, *Leonardo als Techniker und Erfinder,* Jena, 1922.
Véanse también los aduladores capítulos IV-VI de *Engineers and Engineering in the Renaissance,* Baltimore, 1939, de W. Parsons.

puede saber si bien inventaba, bien modificaba, o simplemente copiaba los aparatos que veía al igual que copiaba la forma y la estructura de los cuerpos humanos[3a].

3. ¿REALIZABA LEONARDO EXPERIMENTOS?

Los cuadernos de Leonardo carecían de orden, estando formados por apuntes fragmentarios. Y las vicisitudes por las que pasaron los han dejado en un estado completamente caótico. En estos cuadernos no sólo se limitó Leonardo a anotar sus pensamientos y proyectos, sino también observaciones de cosas que veía, comentarios sobre conversaciones que deseaba recordar o que no había entendido, e incluso conjugaciones del latín[4]; también incluía las proposiciones más sencillas de Euclides, ejercicios de multiplicar, y las ideas más extendidas en su tiempo sobre la mecánica y la filosofía, –las cuales él intentaba asimilar y recordar, al parecer con poco éxito. El lector que busque algo en particular, seguro que lo encontrará en estos cuadernos. El estudioso debe examinar con cuidado los dichos con los que Leonardo acostumbraba sermonearse. Para demostrar su postura independiente respecto a la tradición, se suele recurrir a la cita "Cuando te encuentres solo, te perteneces por entero a ti mismo", pero el contexto indica tan sólo la soledad personal del intelectual. Quedan, sin embargo, otras muchas frases lapidarias, sin contexto determinado, que resultan fáciles de interpretar erróneamente. A las contradiciones y vaguedades propias de Leonardo hay que añadir los errores de sus traductores, procedentes en su mayoría de círculos artísticos y literarios y escasamente capacitados

---

3a *Nota añadida durante las pruebas.* El párrafo de arriba se escribió hace diez años. Me tranquiliza encontrar que la evaluación allí expuesta ha sido confirmada por el máximo experto moderno en la temprana tecnología mecánica, Dr. Ladislao Reti, el cual termina como sigue el primer artículo competente en aparecer sobre los manuscritos nuevamente redescubiertos en Madrid (L. Reti, "The Leonardo da Vinci Codices in the Biblioteca Nacional of Madrid", *Technology and Culture* 8, 437-445 (1967)):

"Esto lleva a la tan discutida y abusada cuestión de los 'inventos' de Leonardo. Yo creo que todavía no ha recibido este problema un planteamiento justo y objetivo. Muchos de los primeros escritores aceptaron como inventos originales de Leonardo a todas las ingeniosas innovaciones mecánicas encontradas en sus manuscritos. Sus enfáticas pretensiones a menudo adolecen de una carencia de información general en el campo de la historia de la tecnología, en particular, en lo que respecta a la obra de los ingenieros que precedieron a Leonardo. Pero hay otros que, por el contrario, no conceden originalidad alguna a Leonardo, afirmando que casi la totalidad de sus ideas mecánicas fue concebida por sus predecesores. Lo más probable es que la verdad se encuentre equidistante de estos dos extremos.

"Leonardo tomó nota de todos los ingenios mecánicos interesantes de los que había visto u oído hablar durante sus frecuentes contactos con otros artistas, eruditos, y artesanos. Tales notas y bosquejos rara vez indican la fuente. Pero no publicó Leonardo sus notas; estaban concebidas para sus propios archivos, y ahora es la tarea del historiador el documentar esas derivaciones. Entre tanto, hemos de reconocer un hecho innegable: aun examinando el legado incompleto y mutilado de Leonardo, nos encontramos con un imponente número de ideas tecnológicas para las que no hay precedentes.

"Los manuscritos de Madrid, con su rico contenido tecnológico, obligarán a un replanteamiento del problema. Si estamos dispuestos a enfrentarnos con los hechos sin pasión ni prejuicio, los bosquejos y notas de Leonardo da Vinci puede que se conviertan en la más importante colección de documentos en el estudio de la tecnología medieval y renacentista."

4 El lector que, criado en la popular tradición de adulación leonardina, se escandaliza por mis palabras, haría bien en consultar el ensayo de A. Marinoni, "Da Vinci's philology", páginas 215-226 de *Leonardo da Vinci,* Nueva York, Reynal & Co., s.f. [1963], escrito alrededor de 1938. Como observa Marinoni, "No se ha apreciado lo perjudicial que ha sido la manía por descubrir adivinaciones anticipadas en todo lo que escribió Leonardo..."

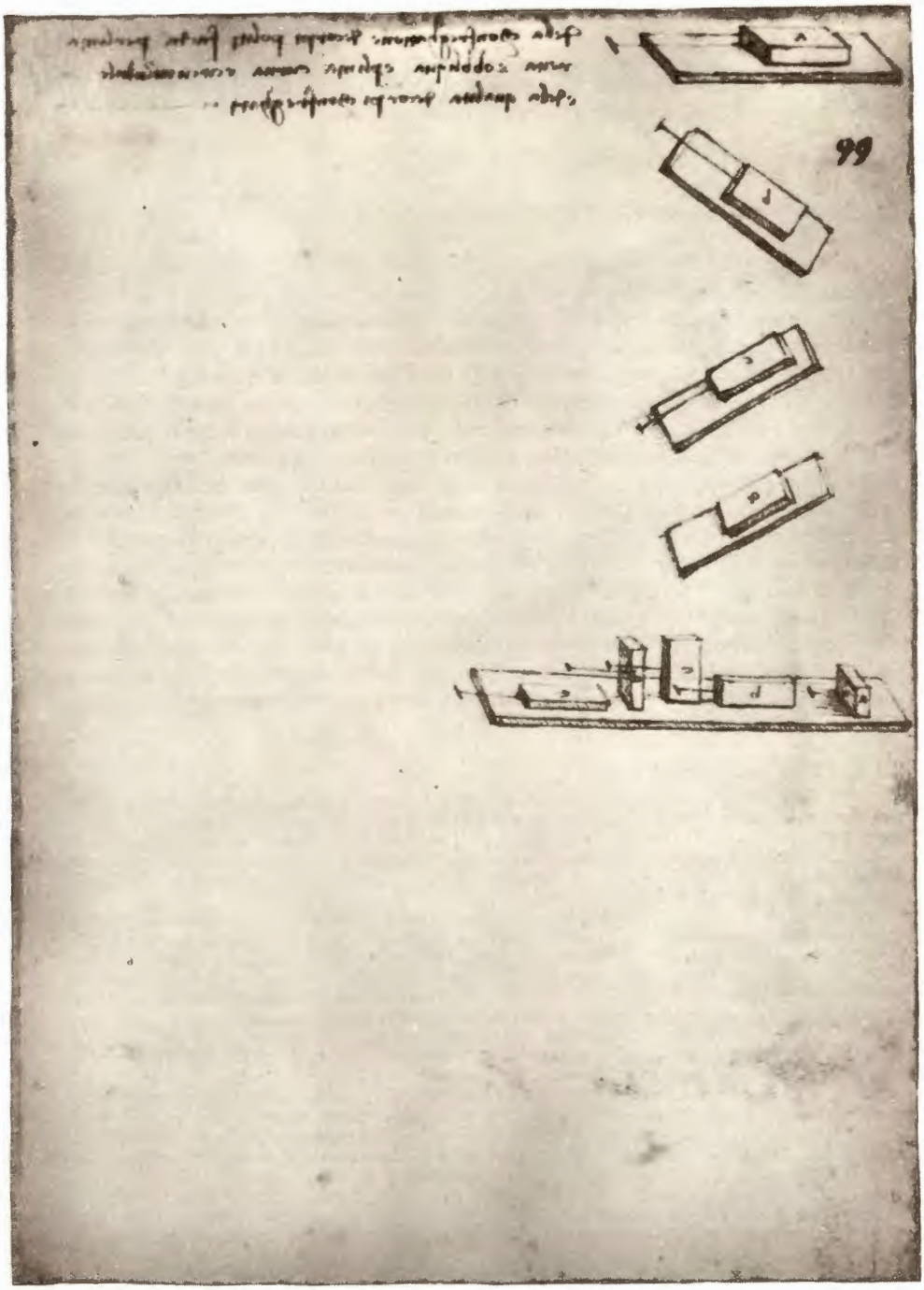


Fig. 3. Atl. 198*r.*a y *v.*a, mostrando algunas de las investigaciones de Leonardo sobre la fricción de deslizamiento (por cortesía de la Biblioteca Ambrosiana, Milano)

para apreciar lo poco que hay de preciso en su obra. Su estilo era de una elocuencia violenta, pero atenuada por vagas generalidades dignas de un profeta; rara vez logró mediante palabras lo concreto o lo definido propios del poeta y el científico. Es impreciso y sus traductores le vuelven aún más impreciso: las frases en las que Leonardo enuncia algo bien específico, puede confiarse que los traductores las reduzcan a un conjunto de tonterías[5]. Sin embargo, allá donde sus palabras le fallaban, sus ojos y sus manos registraban con una exactitud apasionada y, por tanto, es a partir de sus dibujos y bosquejos de donde podemos entresacar sus conocimientos acerca de la Naturaleza y de las máquinas, más que de sus palabras. Así pues, las ediciones más comunes, en las que tan sólo aparece el texto junto con unos pocos de los dibujos más artísticos, resultan doblemente engañosas.

Leonardo soñaba con grandes proyectos. Sus escritos contienen bosquejos de varios libros, que no son los bosquejos de una mente creadora que algún día escribirá su obra maestra, sino simples listas de preguntas que se hacía a sí mismo. No da respuesta a la mayoría de estas preguntas. Aquellas preguntas a las que responde las suele justificar mediante la palabra "pruovasi", que significa "intentar", o "se intentará", o bien, "se demuestra", "se demostrará", pero a menudo el texto que sigue es puramente teórico. A veces la justificación que se da a estas respuestas es "sperienza" que normalmente significa "experiencia" pero se suele traducir por "experimento". El nos cuenta que prefiere preguntar directamente a la propia Naturaleza, pero ¿le respondió alguna vez? De los centenares de "experiencias" que bien planeó, bien indicó que se deberían llevar a cabo, jamás nos cuenta nada acerca de haber realizado alguna de ellas[6].

Sin embargo, resulta muy difícil de encasillarle: toda opinión que se quiera establecer respecto de él tiene su excepción. Entre los cientos de páginas que

---

[5] Vg. MS I(2) 115 67*v.*,

"Sellacqua fussi quantita disscreta comella e chontinua..."

Edward Mac Curdy, en *The Notebooks of Leonardo da Vinci,* Nueva York, Reynal y Hitchcock, 1939 (reimpreso varias veces), traduce este pasaje como sigue (pág. 725):

"Si el agua fuese una cantidad dotada con sentido así como es continua..."
El significado correcto es:
"Si el agua fuese una cantidad discreta en vez de ser continua..."

[6] Creo que mi afirmación es estrictamente correcta, pero tal vez tenga connotaciones injustas. Es posible que Leonardo haya sabido la diferencia entre experiencia y experimento. En al menos un caso describe una pieza de aparato proyectado especialmente para un experimento, a saber, un canal con un costado de vidrio de modo que pueda observarse el flujo en el interior. Se cita este pasaje abajo en la pág. 73. No obstante, que yo sepa, en ninguna parte registra una tabla de números medidos.

Además de la palabra más frecuente, "sperienza", de vez en cuando emplea Leonardo "sperimentatione" (MS I(2) 115 67 *r)* y también "isperimentare" (Atl. 126 *v.* a). No está claro si quiere hacer una distinción entre ellas. Battisti & Alessio citan en su *Dizionario Etimologico Italiano* a Guittone D'Arezzo y Jacopone di Todi para "spermento" y afirman que "esperienza" data tan sólo del siglo catorce; pero dado que no presentan citas de apoyo, no podemos estar seguros de que sea más que literaria la divergencia entre las dos palabras. Todavía no ha llegado hasta la letra "E" el *Grande Dizionario della Lingua Italiana.*

Tanto "experientia" como "experimentum" son vocablos latinos clásicos, siendo aquél el más antiguo, aunque parece ser que ambos significaban en un principio "ensayo, prueba, experimento"; los autores posteriores a Augusto a veces emplean los dos con el sentido de "experiencia". Así pues, desde el mismo comienzo hasta tiempos muy posteriores a Leonardo, lo esencial para hacer la distinción ha sido el contexto, y no el propio vocablo empleado.

Y finalmente, aunque parece haber sido muy raro en tiempos clásicos y medievales el uso de la palabra "experimento" en el sentido en que se emplea en la ciencia moderna, de hecho se dio tal uso, de modo que nadie puede pretender que lo inventara Leonardo. Ciertamente se describen experimentos primitivos en algunos trozos de la *Mecánica* de Herón.

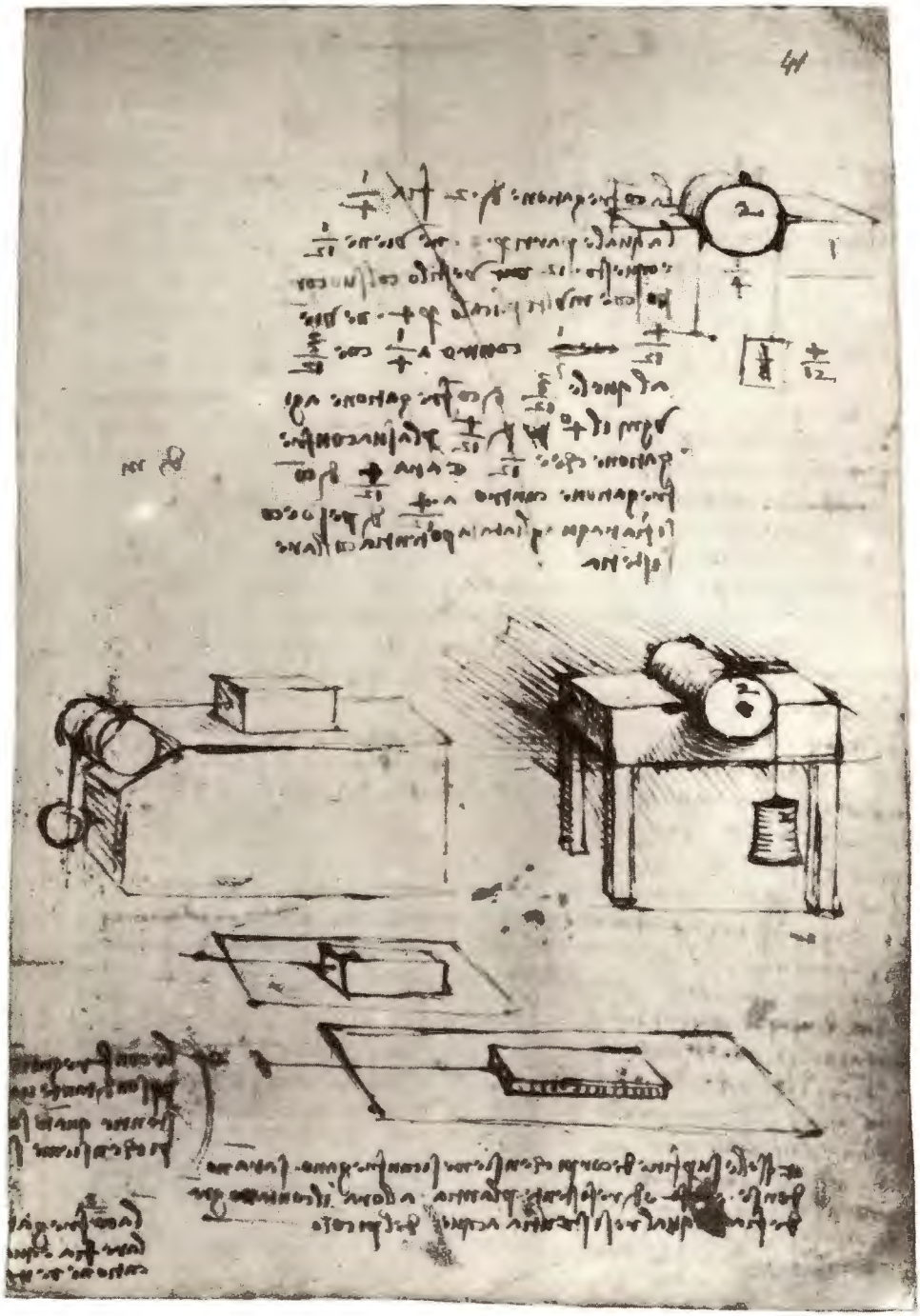


Fig. 4. Arund. 41*r*, mostrando otras investigaciones sobre fricción de deslizamiento (por cortesía de los Fideicomisarios del British Museum)

escribió sobre mecánica, sólo he encontrado una afirmación, y nada más que una, cuyo origen no puede ser más que experimental. Dice así:

> "Todo cuerpo ofrece una resistencia de rozamiento de magnitud igual a la cuarta parte de su peso si el movimiento se realiza sobre un plano [o ¿lentamente?] y las superficies (de contacto) son densas y pulidas [o ¿limpias?]." (Atl. 72 *v.* b.)

En lenguaje moderno Leonardo enuncia aquí una ley corrientemente atribuida a Amontons (1699): la resistencia de rozamiento de un cuerpo que se desliza es proporcional a la fuerza normal y, además, Leonardo asigna el valor un cuarto (1/4) al coeficiente de rozamiento. Aunque Leonardo no nos describe ninguna prueba experimental de esta ley, en otra página (Arund. 41*r.*) dibuja una figura que parece ser proyecto de una prueba (fig. 3). La ley general y el dibujo son de por sí típicos, como más adelante veremos, de los estudios de Leonardo sobre la mecánica: suposición de una proporción simple y proyecto de un aparato para verificarla. El número concreto de 1/4 —valor que no concuerda mal para muchos materiales— no es nada típico, ni es accidental tampoco, ya que Leonardo lo repite en por lo menos cinco lugares distintos (Atl. 81*r.* b, 81*v.* b, 112*r.* b, 197*r.* b, 209*v.* a). No nos dice de dónde lo obtuvo, pero sería extraño que este número procediera más que de un experimento. Así pues, aunque sería injusto afirmar que nunca midió nada, aún más injustificado estaría pretender, basándose en lo que él escribió, que la manera que llevaba a cabo sus estudios acerca de la Naturaleza se fundaba en mediciones. Así, cuando trata de explicar cómo varía el rozamiento según que las superficies de contacto sean lisas o rugosas, vuelve a caer en sus habituales vaguedades (Atl. 198*v.* a, 209*v.* a) (fig. 4).

4. LEONARDO Y LAS VIGAS

De entre las muchas dudas que asaltan a aquel que quiera estudiar de un modo racional los trabajos de Leonardo sobre la Mecánica, las mayores aparecen en las páginas que tratan de los elementos estructurales: vigas, pilares, y arcos. Sus dibujos son impresionantes *(vg.* figs. 5-8). Si encontrásemos estos bosquejos entre los apuntes de algún científico del Barroco, estaríamos seguros de que ilustraban bien un experimento, bien la exposición de una teoría matemática. Los textos de Leonardo en modo alguno cumplen esto. Formula pregunta tras pregunta; da pocas respuestas y las pocas que ofrece son puramente especulativas, adornadas con hipotéticos números enteros en proporciones simples o geométricas, como, por ejemplo, 100, 20, 4 ó 1/2, 1/4, 1/8. Al lector de "antecedentes humanísticos" la aparición de algunos números quizá le evidencia una exactitud seca y "matemática" que él asocia con la ciencia y la medida. Por el contrario, sucesiones como las anteriores le evidencian al científico que en el mejor de los casos, de haberse obtenido unos datos experimentales, éstos fueron alterados para que ajustaran a reglas preconcebidas, y a falta de mayores testimonios concluirá que no se ha llevado a cabo ningún experimento. El problema que aquí se le plantea al historiador no radica tanto en descubrir lo que hizo Leonardo como en su casi total ignorancia de las técnicas con las que se trabajaban en el Alto Renacimiento los materiales y los elementos estructurales de la construcción. No podemos ser tan ingenuos como para creer que los constructores carecían de reglas para estimar la resistencia de las vigas: los hombres que diseñaron y construyeron Chartres, el Kremlin, y San Pedro no pudieron limi-

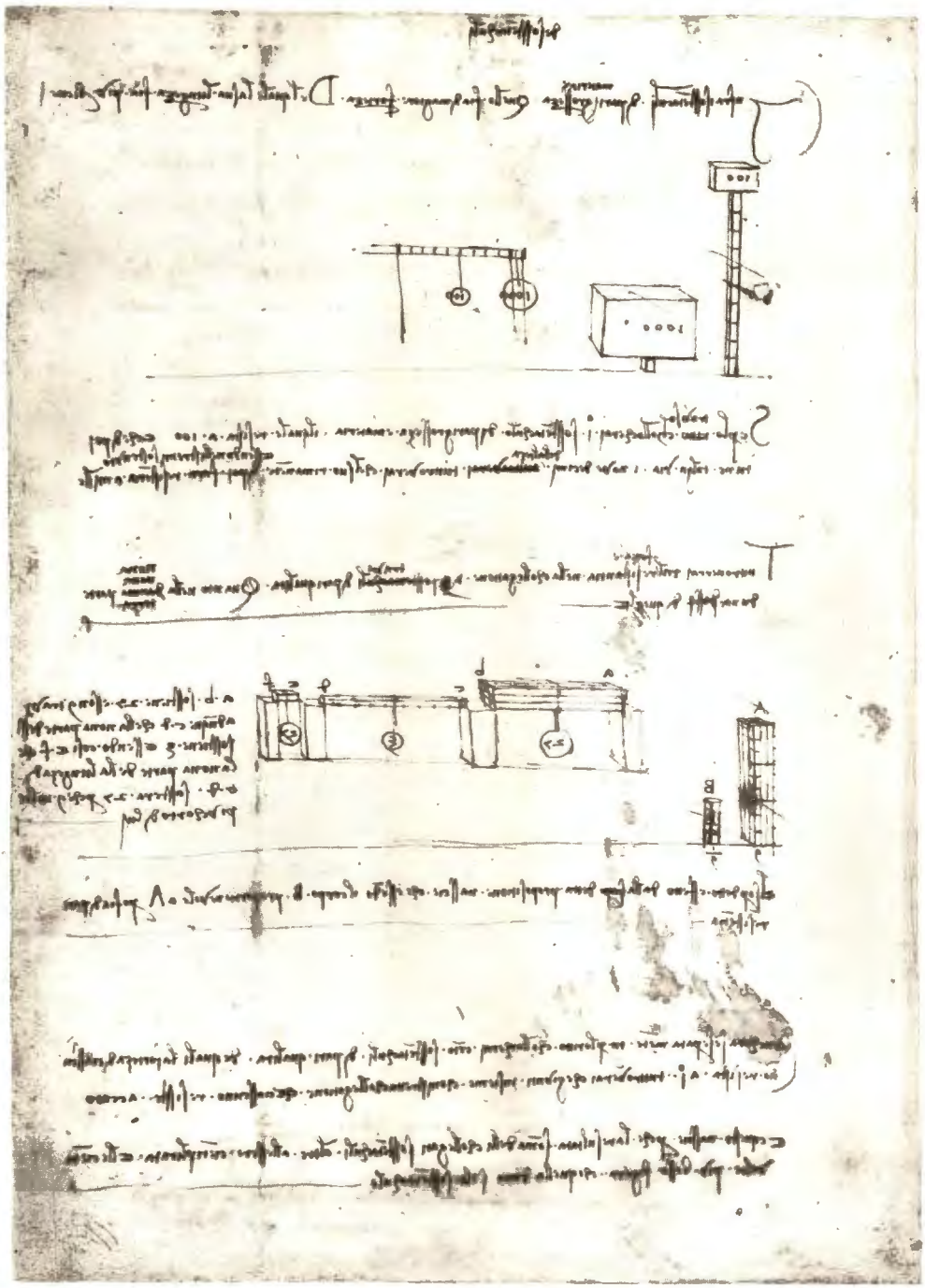


Fig. 5. Atl. 152*r*.b, con cargas hipotéticas de una viga que no se deforma (por cortesía de la Biblioteca Ambrosiana, Milano)

Fig. 6. Atl. 322*r*.b, mostrando los estudios de Leonardo acerca de la flexión de una viga apoyada en ambos extremos (por cortesía de la Biblioteca Ambrosiana, Milano)

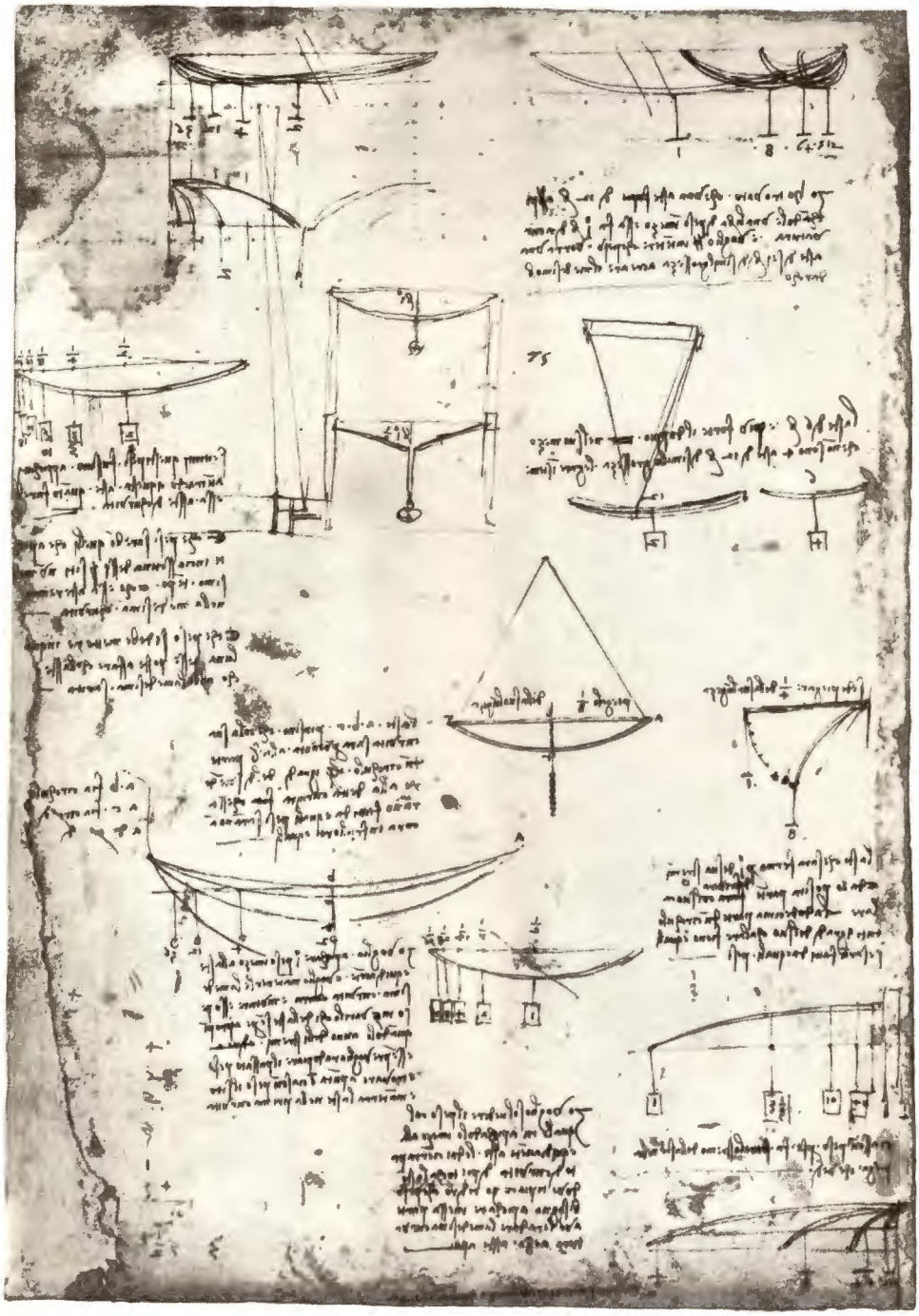


Fig. 7. Atl. 211*r*.b, mostrando los proyectos de Leonardo para la flexión de vigas (por cortesía de la Biblioteca Ambrosiana, Milano)

Fig. 8. MS A 45*v.*, con el bosquejo de Leonardo de una viga pandeada (por cortesía del Institut de France)

tarse a seguir simplemente las tradiciones del oficio ya que no existían suficientes precedentes. Leonardo comprendió que el punto de partida en la ciencia de la construcción es un buen conocimiento de los elementos que componen las estructuras –vigas, pilares, arcos, bóvedas–, pero esta ocurrencia tan obvia debía estar muy extendida en su época y aún antes. De hecho no hay razón para suponer que la arquitectura haya sido excepción a la norma humana de desarrollar un oficio complicado a base de ir dominando progresivamente las rutinas que lo integran.

Está claro que Leonardo se planteó el problema de determinar la tensión de ruptura de una viga en función de su longitud, sección, puntos de apoyo, y cargas; asimismo se planteó el problema de la flexión de una viga en función de la carga y los puntos de apoyo. Por la dificultad que presentan estos problemas, que fueron ya abordados con poco éxito por Galileo y no recibieron un estudio adecuado hasta casi fines de la Ilustración, no nos puede extrañar que Leonardo no los resolviera. Sus cuadernos de apuntes contienen los planteamientos y las respuestas más tempranas, no siempre coherentes, que conocemos sobre estos problemas. Sin embargo, el afirmar, sin mayor base, que Leonardo fue el fundador de la ciencia de la construcción resulta tan ingenuo como atribuir el descubrimiento de las casas al constructor de la casa más antigua que actualmente se mantenga en pie.

Lo más que podemos hacer es exponer lo que Leonardo realizó. Hasta donde yo he podido averiguar, la única de sus múltiples afirmaciones que todavía sobrevive es obvia: la resistencia de una viga es proporcional a su sección recta[7]. Yo me percato de que cualquier carpintero de nuestro tiempo conoce esta regla sin haber estudiado mecánica, y sospecho que tal regla fue bien conocida ya por los constructores del Partenón.

Es al pasar de las leyes numéricas a las representaciones gráficas cuando Leonardo cobra su verdadera dimensión. Es el primero en describir el fenómeno de la deformación:

"... si la carga superpuesta estuviese más cercana de un punto de apoyo que del otro, el soporte se doblará por el lado opuesto al que se aplica la carga, y se romperá por el lado opuesto, es decir, por la parte más lejos de los extremos." (MS A 3*v*.)

El fue el primero en dibujar la catenaria (fig. 9) y proponer su estudio mediante un modelo discreto. Parece que él fue el primero en utilizar calamones muy ligeros para demostrar el conocido fenómeno de vibraciones por resonancia:

"El golpe dado a una campana hace que otra campana semejante conteste retemblando ligeramente; al pulsar la cuerda de un laúd ocurre también la respuesta de una cuerda análoga, de voz similar, en otro laúd, lo que se puede apreciar sin más que poner una brizna de paja sobre la segunda cuerda." (MS A 22*v*.)

Asimismo fue el primero en registrar un hecho experimental que utilizaría Huygens dos siglos más tarde para inferir la existencia de nodos de vibración en una barra vibrante:

---

[7] A. Uccelli ha recogido y comparado casi todos los trozos relevantes a la resistencia de elementos estructurales en un artículo escrito alrededor de 1938 y publicado bajo el título "The Science of Structures", págs. 261-274 de *Leonardo da Vinci,* Nueva York, Reynal & Co., s.f. (copyright 1956). La descripción y el análisis de Uccelli son justos, pero es posible que el lector incauto se confunda por el uso anacrónico de términos como "stress" (esfuerzo) y "strain" (deformación). Véanse también los comentarios míos en págs. 19-22 de *The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies,* 1638-1788, L. Euleri Opera Omnia, (II) 11_2 Zurich, Füssli, 1960.

Fig. 9. MS A 48*r.*, mostrando el bosquejo leonardino de la curva catenaria (por cortesía del Institut de France)

"Al golpear una plancha de madera, el polvo depositado sobre ella se acumula en pequeños montoncitos." (MS A 32*v.*)

Cuatrocientos años más tarde Chladni desarrollaría este sencillo comentario en una brillante técnica experimental; pero Leonardo, como en él era habitual, se limitó a anotar el hecho sin profundizar más.

En toda su obra, aquellas reglas matemáticas que enuncia parecen hipotéticas; faltan conceptos teóricos; aquellos experimentos que proyectó parece que nunca fueron llevados a cabo. Pero escondidas entre las sugestivas listas de valiosas preguntas se encuentran observaciones de algunas experiencias que son verdaderos tesoros.

5. LEONARDO Y SU METODO DE INVESTIGACION, I

Ahora bien, quizá sea mejor, como base para la ciencia, la experiencia en general más que la particularización que representa el experimentar. En nuestra época la manía por la experimentación planeada, controlada, prefijada, y subvencionada, al igual que la guerra, atrae a las masas por su costo exorbitante y su reclamo genérico por una multitud de manos democráticas; esta manía es un síndrome del hombre desquiciado. No puede reprochársele a Leonardo que al plantearse preguntas acerca de la Naturaleza se detenga en la experiencia y las especulaciones teóricas, dejando a un lado el experimentar. Esto es incluso elogiable, aunque en esta tendencia no fue ni mucho menos el primero, ya que los sabios de la antigua Grecia y los escolásticos de Oxford habían seguido este método mucho antes que él, y obteniendo muchos mejores resultados que los que él obtuvo.

La curiosidad de Leonardo no conocía límites: observaba y dibujaba como nadie, pero no le fue dado el orden y, por tanto, la capacidad de crear una teoría. Si no fuera suficiente prueba el desorden de sus cuadernos de apuntes, que sólo en parte estaban destinados a publicarse y a los que nunca dio una forma definitiva, podemos leer en *Las vidas de los pintores* de Vasari,

"Se dice que cuando el Papa le encargó un cuadro, comenzó inmediatamente a destilar aceites y hierbas para obtener el barniz, lo que dio lugar a que el Papa León dijera: '¡Vaya con este hombre! Jamás hará nada, pues antes de empezar el trabajo piensa ya con terminarlo'."

Cuando Leonardo tenía cerca de 60 años comenzó un nuevo libro, uno de los muchos que había pensado escribir con la idea de darlos a publicar, con las siguientes palabras:

"Y sea ésta una colección sin orden, escogida entre las muchas hojas que he copiado confiando en ordenarlas más adelante según las materias que tratan..." (Arund. 1*r.*)

Continúa, advirtiendo al lector que las repeticiones son de esperar, por lo cual se excusa:

"Y si intentara el evitar caer en dicho error, me vería obligado, antes de escribir algo acerca de una materia, a repasar todo lo que hubiera escrito antes..."

Por tanto, Leonardo confiesa no percibir ninguna ordenación natural. Lo más que consigue es clasificar sus comentarios por títulos, y aun así reconoce ser incapaz de recordar lo que ha dicho poco antes. La esencia de la ciencia es el orden que descubre o impone sobre los fenómenos. En ningún lado se aprecia más claramente

esta propiedad de la ciencia que en los escritos de Euclides y Arquímedes, que vivieron mucho antes que Leonardo. El orden era muy estimado por la tradición y floreció de nuevo con figuras más tardías como Stevin. La ciencia *nunca* ha sido un montón de observaciones y conjeturas, ni siquiera siendo verdaderas las observaciones y buenas las conjeturas. Así pues, no hace falta una gran competencia en el estudio de la ciencia y de su historia para poder rechazar nueve décimas partes o más de lo que escribió Leonardo, por no haber contribuido en absoluto al desarrollo de la ciencia. Lo que un hombre contribuye a la posteridad no es la suma algebraica de sus esfuerzos, sino lo mejor de entre ellos. Por tanto, habremos de buscar en el montón de escoria para encontrar las pepitas que en él puedan ocultarse.

6. LEONARDO SOBRE LA FUERZA Y EL MOVIMIENTO

Rara vez escribió Leonardo más de un único párrafo seguido sobre cualquier materia; a menudo, sólo una línea. Cuando se comparan conjuntamente sus afirmaciones sobre una materia, aparecen como descargas de repeticiones y contradicciones esporádicas.

"La fuerza se genera a partir de la escasez y la abundancia; es hija del movimiento material, sobrina del movimiento espiritual, madre y origen del peso; y este peso es finito en el elemento del agua y la tierra, y esta fuerza es infinita ya que mediante ella podrían moverse infinitos mundos si se pudieran construirse los instrumentos capaces de generarla." (Arund. 151*r.*)

"Todos los movimientos violentos se van debilitando a medida que se alejan de sus causas." (MS $H^{(2)}$ 77 [29] *v.*)

"Cuanto más se aleja el movimiento natural de su causa, en la misma medida se hace más rápida." (MS $H^{(2)}$ 78 [30] *r.*)

"Afirmo que la fuerza es una virtud espiritual, un poder invisible que está localizado e infundido en aquellos cuerpos que se ven desviados y arrancados de su (movimiento) natural, por una accidental violencia exterior causada por el movimiento, y dotándoles de una vida activa de asombroso poder, restringe a todas las cosas creadas a un cambio de forma y lugar, y corriendo con furia hacia su deseada muerte, continúa diversificándose por medio de las causas. La lentitud la engrandece, la rapidez la debilita. Nace en la violencia y muere en la libertad. Y cuanto más grande es, en la misma medida se consume a sí misma. Y rechaza con furia todo aquello que se interpone en el camino de su destrucción, desea conquistar, acabar con su causa, con aquello que se le opone, y en la conquista acaba consigo misma. Su poder crece allá donde encuentra mayor oposición. Todas las cosas prefieren huir de su propia muerte. Todo aquello que está restringido a su vez restringe. Nada se mueve sin ella. El cuerpo en el cual nace no aumenta ni de peso ni de forma. Ningún movimiento debido a ella es duradero. Crece con los esfuerzos y decae en el descanso. El cuerpo al cual está limitada carece de libertad. Y a menudo genera nuevas fuerzas por medio del movimiento." *Etc.* (MS A 34*v.*)

"La pesantez, la fuerza, y la percusión, ya que son frutos del movimiento, no sólo pueden llamarse indiferentemente madre e hijas las unas de las otras y todas ellas hermanas entre sí, sino también generatrices e hijas de este movimiento; pues si ellas no estuvieran entre nosotros, no podría ser creado el movimiento y sin movimiento no pueden manifestarse tales poderes." (Forster II 117 *r.*, véase Arund. 37*r.* & *v.*)

Este tipo de lenguaje atrae a cierta clase de lectores, al igual que "Also sprach Zarathustra" y las profecías de Nostradamus. Aunque algunos entusiastas tienen en alta estima las opiniones de Leonardo acerca de la fuerza, un observador racional dudaría mucho, después de leer las citas anteriores, en aceptar como procursora de la segunda ley de Newton la siguiente afirmación[8]:

---

[8] Esta frase aparece escrita en el margen de un folio de declaraciones acerca de la fuerza y el movimiento, entre las cuales se incluyen: "El movimiento se crea por lo caliente y lo frío",

"El movimiento es un accidente nacido de la desigualdad del peso o de la fuerza." (Arund. 205*r.*);

o bien:

"La pesantez, la fuerza, al igual que la percusión deben considerarse tan generadoras del movimiento como engendradas por él." (Arund. 184*v.*);

o bien:

"La fuerza es la causa del movimiento, el movimiento es la causa de la fuerza." (Arund. 34*v.*)

Afirmaciones de este cariz son las que han dado pie a la pretensión de canonizar a Leonardo como precursor de Galileo y Newton por parte de ingenuos entusiastas que, escogiendo unas frases en las cuales palabras tales como "gravedad" y "fuerza" puedan interpretarse en el sentido moderno, las elevan al nivel de profecías sobre la ciencia moderna. No es que las afirmaciones estén equivocadas. Pero tampoco son correctas. Si hubieran aparecido las tres leyes de Newton, palabra por palabra, en uno de los libros de apuntes de Leonardo, tampoco cabría hacer afirmaciones respecto de su verdad o falsedad. El más correcto enunciado científico pierde todo su sentido científico si faltan las definiciones de los términos que en él intervienen y la posible aplicación matemática a distintos problemas. Por ejemplo, en uno de sus escritos Leonardo afirma:

"Toda acción llevada a cabo por la Naturaleza lo es por el camino más corto." (Arund. 85*v.*, véase Q. Anat. IV 16*r.*)

Y sus incondicionales han interpretado esta sentencia como implicación del principio del tiempo mínimo de Fermat en Optica y del principio de mínima acción de Maupertuis en Mecánica Analítica. Como Leonardo no nos dice cómo han de entenderse los conceptos de "acción" y "camino", yo no veo aquí más que una confusa especulación que sólo cobra un cierto significado cuando se les da a los conceptos unas acepciones modernas que, desde luego, tanto Leonardo como sus contemporáneos desconocían por completo[9]. Ha sido a menudo alabada la cualidad poética de lo que Leonardo escribió acerca de la fuerza. Puede que sea poesía para algunos, pero para nadie puede concebirse como ciencia.

Aunque frecuentemente se ha considerado como un logro de Leonardo el negar la posibilidad del movimiento perpetuo, sólo he podido encontrar dos fragmentos que tengan algo que ver con este tema. El primero dice:

"la ligereza y la pesadez son al mismo tiempo madre e hija cada una de la otra", y también "Ningún elemento de por sí posee pesadez o ligereza a menos de que se mueva."

[9] En justicia he de hacer constar aquí que escribió Leonardo la frase sobre "el camino más corto" inmediatamente después de afirmar que en un espejo el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión, y justo antes de escribir:

"Según sea la potencia de la percusión, así es el rebote."

Por tanto, percibía que estas tres ideas estaban de alguna manera relacionadas, como efectivamente lo han demostrado investigaciones muy posteriores, pero ni siquiera apunta hacia cuál pudiera ser dicha relación. Me recuerda esto la manera en que yuxtapuso Galileo la descripción de la vibración de una cuerda pulsada a la de la oscilación de un péndulo. No obstante, a pesar de que Galileo es superado tan sólo por Leonardo en cuanto a su capacidad de inspirar pretensiones absurdas por parte de sus aficionados modernos, ni siquiera éstos sugieren que en realidad descubriera el principio de oscilaciones pequeñas.

"Ningún objeto inanimado puede empujar o arrastrar sin desplazarse conjuntamente con aquello que impulsa. Y estos impulsores no pueden ser más que la fuerza o el peso, y si el peso empuja o tira del objeto, sólo realiza tal movimiento sobre el objeto por tender éste a mantenerse quieto, y cuando ningún objeto impulsado por su movimiento de caída será capaz de volverse a elevar a su altura original, y entonces el movimiento se acaba.

"Y si el objeto que mueve al otro objeto se deviene en (¿crea?) fuerza, entonces esta fuerza acompaña al objeto que mueve, consumiéndose a sí misma en la misma medida en que lo mueve. Siendo consumida, ningún objeto movido por ella puede ser capaz de volver a crearla. Luego ningún objeto movido puede tener una larga duración en su movimiento, pues cuando faltan las causas, faltan los efectos." (MS A 21*v*.)

Mach[10] citó el comienzo de este fragmento, aunque ligeramente modernizado y simplificado, calificándolo de "muy claro". Sin embargo, no citó el final, que de hecho niega el principio de la inercia *in vacuo*, pues sólo causas pueden producir efectos. Tampoco citó el párrafo siguiente en el cual se afirma que en algunos casos el movimiento sobre un plano perfecto es continuo, ofreciendo como ejemplo el deslizamiento sobre hielo. El segundo párrafo:

"Ningún objeto insensible se mueve por sí mismo; por tanto, cuando se mueve, estará movido por un poder desigual, esto es, de tiempo y movimiento desiguales, o de peso desigual, y cuando el deseo del primer impulsor cese, el segundo se parará de inmediato." (MS A 22*v*.)

Hasta donde alcanzo yo a entender este párrafo, parece ser una mezcla de Aristóteles y física medieval, ambos mal entendidos. Más impresionantes que estos párrafos, que parecen implicar la imposibilidad teórica del movimiento continuo, son los intentos que hizo Leonardo para diseñar una máquina hidráulica que fuera capaz de moverse perpetuamente en la práctica. No se le puede reprochar el que se equivocara en ambos intentos; fue excepcional por su capacidad de enfocarse y pensar independientemente sobre ambos problemas; no lo fue en su confusionismo respecto de los dos. De todas formas, no veo que haya igualado a aquellos que lo precedieron en la profundidad de sus afirmaciones, erróneas o no, acerca de estos temas.

La ciencia no está compuesta por lemas, por muy ciertos que éstos sean; el científico no es un vidente místico, profeta del futuro, curandero de cuerpos o almas, o benefactor de las masas. Tampoco es una obra científica escritura sagrada a ser interpretada por sacerdotes, profesores de filosofía, o críticos de arte.

Estos libros de apuntes recompensan a cualquiera que los estudie con ideas preconcebidas. Para Freud, a quien siempre intrigó la indiferencia que demostraba Leonardo para con el sexo opuesto, excepto sobre el lienzo, una interpretación fantasiosa de ciertos dibujos, apoyada tan sólo por un comentario entre muchos miles, dio lugar a un libro el cual probaba que Leonardo estuvo enamorado de su madre. En otros fragmentos, Valery descubrió un método para escribir poesía. Al poeta le está permitido imaginarse la Historia; algunos psicólogos lo incluyen dentro del ámbito de su profesión; pero es actividad poco recomendable para el historiador. Desgraciadamente los científicos que estudian y comentan la historia de su disciplina, desde Mach hasta los escribas de los libros de textos actuales, han escogido el mismo camino que los poetas y psicólogos.

---

[10] E. Mach, *Die Mechanik in ihrer Entwicklung, Historisch-Kritisch dargestellt*, Leipzig, Brockhaus, 9.ª ed. (1933), Cap. I, § 5, ¶ 9.

7. El nacimiento de la Historia de la Mecanica

Por una casualidad nacida de la ignorancia, Leonardo nos ha legado algo incluso hoy en día desconocido para muchos, a saber, la Historia de la ciencia occidental durante la Edad Media. Aparte de algunos comentarios hechos ya en su propia época, la obra científica de Leonardo fue descrita por primera vez en un ensayo de Giambattista Venturi, entusiasta e impreciso, impreso en 1797. Los historiadores literarios habían creado entre tanto el mito del "Renacimiento". Según este mito, el hombre hibernó durante la Edad Media bajo el palio de las reiteraciones escolásticas, tomadas de Aristóteles e impuestas por la Iglesia; el Renacimiento, desechando todo esto, abrió sus ojos, descubriendo al hombre y al mundo a través de sensaciones personales. Aunque quepa mantener esta teoría para el Arte, como mera cuestión de gusto, en el ámbito de la ciencia, es sólo aplicable a la anatomía; el "alto" Renacimiento, 1450-1500, es uno de los períodos más estériles para las matemáticas y física occidentales, y la única ciencia exacta del Renacimiento tardío, 1500-1550, es el Algebra, que floreció gracias a un minucioso estudio de las matemáticas árabes y no de la boquiabierta contemplación del mundo. ¿Dónde se encuentra la ciencia empírica que debiera haber coronado este "renacer" del conocimiento? Galileo, a quien algunos físicos consideran fundador del empirismo del cual ellos se sienten herederos, aparece en los períodos Manierista y Barroco temprano, esto es, cien años más tarde. Ciertos historiadores del siglo pasado hallaron en el ensayo de Venturi el eslabón perdido: los cuadernos de apuntes del asombroso Leonardo, quien por lo menos mostró lo que el Renacimiento *pudo* haber producido, a pesar de que su obra quedó incompleta, sin publicar, y desconocida durante siglos. Entre los años 1881 y 1936, se publicaron facsímiles de estos cuadernos de apuntes.

Entre los lectores de estos primeros volúmenes se hallaba el gran hombre que fundó la moderna historia de la ciencia: Pierre Duhem (1861-1916). Fue un científico, como debe serlo todo historiador de la ciencia que se precie de tal, y nos ha legado contribuciones imperecederas en química-física, termodinámica, hidrodinámica, y elasticidad. La lectura de los cuadernos de apuntes de Leonardo fue lo que motivó en Duhem un interés por el estudio de la historia de la ciencia. De sus hallazgos fue naciendo poco a poco una visión casi antagónica de la obra de Leonardo, postura que es sostenida hoy día por la inframinoría que conocen de modo directo tan temprana época de la ciencia. Mientras los críticos divagaban, efusivos, los historiadores que entonces había –apenas unos pocos semi-filósofos y profesores de Ciencias– descubrieron más o menos implícitas en los apuntes de Leonardo algunas de las ideas de Galileo. Previamente, los historiadores habían creído que estas ideas nacieron sin más del "genio" de Galileo. Lagrange[11] escribió en 1788, acerca de Arquímedes y Galileo:

"El intervalo que separa a estos dos grandes genios desaparece en la historia de la mecánica", y esta visión simplista, tan satisfactoria como la descripción que da el Génesis de la Creación, le bastó a Mach un siglo más tarde[12]. El "descubri-

---

11 Durante la preparación de este ensayo para la imprenta no he podido localizar esta cita. Se encuentra una declaración un tanto más específica al principio de la Parte II de J.-L. Lagrange, *Méchanique Analitique,* París, Desaint, 1788: "La Dinámica se debe enteramente a los modernos, y Galileo es el que colocó sus primeros cimientos."

12 Así, en la primera edición de su *Die Mechanik in ihrer Entwicklung,* de 1883, Mach no menciona a ningún autor que viviera en el período que separa a Arquímedes de Leonardo.

Fig. 10. Pierre Duhem (1861-1916)

miento" de Leonardo se limitó a llevar hacia el pasado la aplicación de esta teoría. También él tuvo los mismos materiales de trabajo: su "genio" y nada más; el único problema que quedaba planteado a estos historiadores era descubrir cómo llegaron las ideas de Leonardo a Galileo, haciendo de este último un nieto, si no un hijo, del Renacimiento.

Ahora bien, Duhem tomó muy en cuenta el enorme volumen y la diversidad de temas que abarcan los escritos de Leonardo. Hoy en día pueden verse recopilados en un único tomo sus fragmentos acerca de los principios generales de la mecánica; tan sólo éstos abultan 550 grandes páginas[13], excluyendo lo que escribió sobre matemáticas, artefactos diversos, sólidos flexibles y fluidos. Se necesitaría otro volumen de 400 páginas para recoger sólo una parte de sus escritos acerca del movimiento de fluidos[14]. Aparte de la idea que pueda tener un literato sobre la capa-

---

13 Leonardo da Vinci, *I Libri di Meccanica nella ricostruzione ordinata da Arturo Uccelli, preceduti da un'introduzione critica e da un'esame delle fonti,* Milán, Hoepli, 1940.

El estudio más extenso de la mecánica de Leonardo es aquel de R. Marcolongo, "La meccanica di Leonardo da Vinci", *Società Reale di Napoli, Atti della Reale Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche* (2) 19, núm. 2, 148 págs. (1932). Los diversos capítulos son como sigue:

Parte I. Estática:

1. La estática medieval y las fuentes de Leonardo.
2. Palancas rectas y dobladas y la balanza.
3. Concepto de momento y composición de fuerzas.
4. Equilibrio sobre el plano inclinado. Estabilidad de la balanza. Polígono de soporte.
5. Centro de gravedad.
6. La polea, el polipasto y el problema de reacciones ligadas.
7. Investigaciones sobre la resistencia de materiales, sobre la teoría del arco, y sobre el rozamiento.

Parte II. Dinámica:

1. Dinámica griega y medieval.
2. Fuerza, percusión, ímpetu, peso.
3. Las leyes del movimiento.
4. Movimiento libre de un cuerpo pesado. Movimiento sobre un plano inclinado. Movimiento de proyectiles y choques.

De acuerdo con mi costumbre con respecto a las fuentes secundarias, no consulté ésta hasta terminar mis propios estudios. El ensayo de Marcolongo contiene gran parte de las mejores citas de las obras de Leonardo, pero no puedo participar en las generosas extrapolaciones que hace de las investigaciones de su gran compatriota. El texto de Uccelli es más completo, sus interpretaciones más medidas. Ninguno de estos dos ensayos considera las investigaciones de Leonardo sobre los fluidos.

Nunca he podido ver los *Studi Vinciani,* Nápoles, 1936, de Marcolongo. En los capítulos VIII y IX de la biografía general, *Leonardo da Vinci, Artista-Scienziato,* Milán, Hoepli, 1939, del mismo autor, se da un breve y generoso repaso a la matemática, mecánica, física, e ingeniería leonardinas.

Existe un texto en inglés sobre este tema: I. B. Hart, *The Mechanical Investigations of Leonardo da Vinci,* Chicago, Open Court, 1925. Puede juzgarse su nivel por las siguientes dos citas:

"Para los escolásticos, sin embargo, lo que importaba eran las meras declaraciones del Peripatético. La iniciativa y la independencia eran inexistentes en el campo de la física." (Pág. 13.)

"Ahora bien, Leonardo, ya más de cien años antes de Galileo, fue ciertamente un experimentalista. Si el gran filósofo toscano fue de hecho el 'Padre de la Filosofía Experimental', entonces habría que considerar a da Vinci como su abuelo... La llamada al experimento penetra todos sus escritos sobre temas científicos." (Pág. 78.)

14 Leonardo da Vinci, *Del Moto e Misura dell'Acqua, libri novi ordinati da F. Luigi Maria Arconati editi sul codice archetipo Barberiano a cura di E. Carusi ed A. Favaro,* Bologna, Zanichelli [1923].

LES SOURCES DES THÉORIES PHYSIQUES.

LES

ORIGINES DE LA STATIQUE

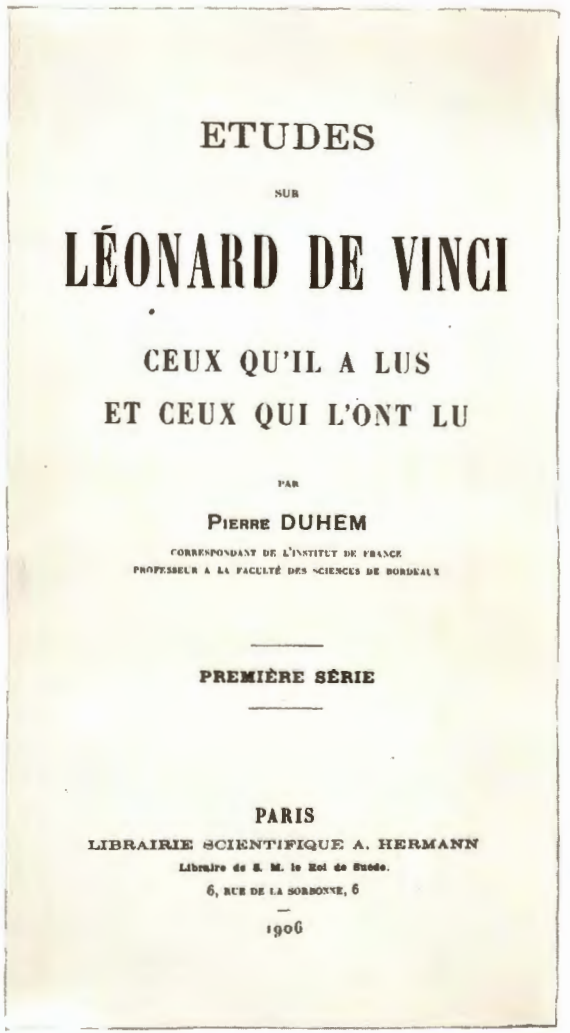
PAR

P. DUHEM

Correspondant de l'Institut de France,
Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

TOME PREMIER

PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN
Libraire de S. M. le Roi de Suède et de Norvège
6, RUE DE LA SORBONNE, 6
1905



ETUDES

SUR

LÉONARD DE VINCI

CEUX QU'IL A LUS
ET CEUX QUI L'ONT LU

PAR

PIERRE DUHEM

CORRESPONDANT DE L'INSTITUT DE FRANCE
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX

PREMIÈRE SÉRIE

PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN
Libraire de S. M. le Roi de Suède.
6, RUE DE LA SORBONNE, 6
1906

Fig. 11. Portadas de los primeros libros de Duhem sobre la historia de la ciencia medieval

cidad creadora de un "genio", pocos científicos estarían dispuestos a creer que un millar de páginas que traten de la mecánica, ya sean correctas o no, hayan podido *jamás* brotar únicamente del genio de un individuo aislado. El problema que se planteó Duhem fue: ¿de dónde obtuvo Leonardo estos conocimientos, y hasta qué punto los modificó o transformó? En el intento de contestar a estas preguntas, Duhem fue la primera persona desde tiempos del Renacimiento que se molestó en leer lo que sobre mecánica y física habían escrito los escolásticos medievales. De hecho, descubrió la ciencia de la Edad Media, y dio a conocer, asociada a una serie de descubrimientos y teoremas muy concretos, una larga relación de nombres que nunca hasta entonces habían aparecido en la historia de la ciencia: Jordanus de Nemore, Jean Buridan, Nicole Oresme, Richard Swineshead, William Heytesbury, y otros. En medio de sus imperecederos descubrimientos históricos, Duhem ya había llegado a la conclusión de que[15]: "En los trabajos sobre mecánica de Leonardo da Vinci, no hay ninguna idea esencial que no proceda de los geómetras medievales."

8. LA CINEMATICA Y DINAMICA MEDIEVALES

Trabajos posteriores llevados a cabo por una escuela de historiadores minuciosísimos, además de la publicación de los textos utilizados por Duhem, así como de otros desconocidos por él, han cambiado muchos detalles pero apenas si han variado la visión general que nos legó Duhem acerca de los logros medievales. Las publicaciones[16] más recientes nos demuestran sin lugar a dudas que las propiedades cinemáticas más fundamentales de los movimientos uniformemente acelerados, todavía atribuidas a Galileo en los textos de física de nuestros días, fueron descubiertas y demostradas por estudiosos del Merton College –William Heytesbury, Richard Swineshead, and John of Dumbleton– entre los años 1328 y 1350. En sus trabajos distinguían entre cinemática, la geometría del movimiento, y dinámica, la teoría que estudia las causas del movimiento. Su enfoque era matemático. Consiguieron formular con bastante claridad el concepto de velocidad instantánea, lo que indica que entrevieron los conceptos de función y derivada; demostraron que el espacio recorrido en un tiempo dado por un movimiento uniformemente acelerado es igual que aquel recorrido por un movimiento uniforme cuya velocidad sea la media de las velocidades máxima y mínima del movimiento acelerado. En principio, pues, la naturaleza cualitativa de la física griega fue reemplazada, al menos en el estudio de los movimientos, por las magnitudes numéricas que han regido desde entonces la física occidental. Esta labor de los escolásticos de Oxford, se difundió rápidamente

---

15 Página 192 del Vol. I de *Les Origines de la Statique*, París, Hermann, 1905-1906. Las principales publicaciones ulteriores de Duhem sobre esta materia se incluyen en sus *Etudes sur Léonard de Vinci*, 3 tomos, París, 1906-1913, y *Le Système du Monde*, París, tomos 1-5, 1913-1916, y tomos 6-10, 1954-1959.

16 A. E. Moody & M. Clagett, *The Mediaeval Science of Weights*, Madison, University of Wisconsin Press, 1952.

M. Clagett, *The Science of Mechanics in the Middle Ages*, University of Wisconsin Press,1960.

E. Lamar Crosby, Jr., *Thomas of Bradwardine. His Tractatus de Proportionibus*, Madison, University of Wisconsin Press, 1961.

El libro de Clagett contiene los textos principales, traducciones de los mismos, así como un comentario y análisis tan erudito como penetrante. Es la fuente básica para el estudio moderno de la mecánica medieval. Las citas que he recogido abajo de John the Grammarian y Buridan proceden de esta obra.

por Francia, Italia, y otras partes de Europa. Casi de inmediato, Giovanni da Casale y Nicole Oresme dieron la manera de representar resultados mediante gráficas geométricas, introduciendo así una relación entre la geometría y el mundo físico que ha quedado como otro hábito característico del pensamiento occidental –un hábito tan profundamente arraigado que resulta familiar a todo carpintero y tan sólo pasa desapercibido en ciertas profesiones altamente especializadas.

La dinámica medieval se acerca más a los puntos de vista aristotélicos que al moderno pensamiento físico, pues da mucho énfasis sobre el concepto de resistencia frente a lo que hoy día llamamos inercia. A pesar de todo y en contraposición a la ciencia griega, esta dinámica medieval es cuantitativa e intenta describir velocidades numéricas en términos de otras magnitudes numéricas. Una precursora de las ideas de inercia, cantidad de movimiento, y energía fue la teoría del "ímpetu", desarrollada en París por Jean Buridan en el mismo período en que en Oxford se estaban estudiando los conceptos cinemáticos. Rechazando las ideas de Aristóteles sobre el movimiento de proyectiles, Buridan hizo suya una idea formulada 800 años antes por John the Grammarian, a saber: "cierta fuerza motriz incorpórea es cedida por el proyector al proyectil". Buridan sustituyó esta afirmación cualitativa por un enunciado cuantitativo: "cuanto mayor es la cantidad de materia, en la misma medida puede recibir el cuerpo un mayor ímpetu y de una manera más intensa" y "...en la misma medida en que el impulsor mueve al cuerpo en movimiento más rápidamente, le proporcionará un mayor ímpetu". Así pues, Buridan casi llega a definir como ímpetu lo que ahora denominamos cantidad de movimiento. Buridan infiere de lo que él llama "experiencias" –observaciones de algunos fenómenos sencillos relacionados con peonzas, lanzas y barcos– que una magnitud de este tipo mide la tendencia de un cuerpo de mantenerse en movimiento.

En contraste con los acertijos de Leonardo, los resultados obtenidos por los escolásticos son explicados con todo detalle, desarrollados paso a paso mediante teoremas matemáticos bien demostrados en tratados muy metódicos, y con multitud de ejemplos tomados de la vida cotidiana. En estos tratados no existe ni una sola proposición de la que se afirme su validez apelando a una autoridad superior, sea ésta Aristóteles o algún eclesiástico.

Clagett[17] ha presentado muchas pruebas atestiguando que estas ideas, nacidas en Inglaterra y Francia, a comienzos del siglo XIV, fueron muy discutidas durante la segunda mitad de este mismo siglo en Francia, el Imperio, e Italia, y se enseñaban en las universidades italianas ya en el siglo siguiente. A finales del siglo XV aparecieron multitud de libros tratando de estos temas, poniéndolos así al alcance de todo el mundo, al menos, de todo aquel que supiera latín y matemáticas.

No sólo los principales textos de los más grandes filósofos naturales del Medievo, sino también muchas obras de menor importancia fueron publicados, entre otros lugares, en la misma Venecia y al propio tiempo en que Leonardo se encontraba allí trabajando. (El hecho de que las empolvadas obras escolásticas se vendieran todavía en 1500, a pesar del desprecio de los literatos humanistas, tira por tierra la imagen popular que se tiene aún del Renacimiento como el "renacer del conocimiento".)

---

17 Véase el importante Capítulo de su libro, citado en la pág. 41. También Randall, en el ensayo citado abajo, pág. 49, escribe:

"Habiendo realizado yo mismo ciertas lecturas de los anticlericales escritores sobre filosofía natural de la Italia del Quattrocento, ..., me he encontrado con que todas las ideas supuestamente "nuevas" asociadas con Leonardo antes de los descubrimientos de Duhem, ya se conocían y se enseñaban en las universidades italianas del siglo quince –en Padua, Boloña, Pavia, y los demás."

Aunque los escolásticos de la Edad Media veneraban a Aristóteles de una manera harto difícil de comprender en la actualidad, no lo creían infalible, considerándose capaces de sobrepasarle en algunas ocasiones, hasta el punto de llegar a contradecirle. En una palabra, le consideraban del mismo modo que hoy en día se considera a Newton. Los humanistas del Renacimiento literario, en cambio, introdujeron una nueva actitud ante los clásicos: una estricta reverencia hacia la autoridad que durante la Edad Media se había exigido a vasallos y nobles, pero no a los pensadores escolásticos. Para los humanistas, el hombre y la naturaleza se encontraban en los puros clásicos griegos, limpios de glosas y corrupciones monjiles. El Renacimiento del Humanismo fue también el renacer del servilismo intelectual. Condenando a los aristotélicos medievales a fortiori por no haber podido beber de las fuentes puras –los por aquel entonces perdidos textos griegos– los humanistas retrocedieron en el tiempo y en la ciencia hasta Platón. En las revoluciones, que tan sólo son un tipo particular de guerra, los slogans sustituyen al concepto y al método, y la destrucción es rey. A su vez, Platón fue discípulo de Sócrates, aquel gran revolucionario que desvió el pensamiento griego de los difíciles problemas de la filosofía natural que tan brillantemente habían debatido sus predecesores, de los que sólo se conservan algunos fragmentos irónicamente llamados "presocráticos". Por el contrario, Sócrates enseñó una filosofía que cualquiera podía captar, que se desentiende de la ciencia y las matemáticas mediante beatíficas componendas y gira incesantemente en torno de los temas de la moral y la política. Tal filosofía fue rápidamente resucitada y reanimada por los humanistas que desecharon los argumentos escolásticos mediante observaciones burlonas sobre el número de ángeles que podían bailar sobre la punta de un alfiler. Los humanistas, que se habían rebelado contra las doctrinas habitualmente sostenidas por las instituciones que de antiguo habían protegido la vida intelectual, tenían que vivir apartados de la Iglesia y las universidades; para impresionar, tenían que hacerse propaganda: el periodismo es una creación del Renacimiento. Una filosofía para príncipes y mercaderes no podía apestar a conventos y sacristías; debía ser sencilla, apta para conversar amablemente con las damas durante los atardeceres invernales en Urbino. Tal es el Platonismo y el Neo-Platonismo, pero no es ciencia.

9. LEONARDO Y LA TRADICION

Así era el mundo de Leonardo. Inculto y casi analfabeto[18], él desconfiaba y evitaba la compañía de los estudiosos. Admiraba a Arquímedes por su reputación, pero la única relación comprobada hasta la fecha entre ambos es una página suelta de Arquímedes hallada en uno de los cuadernos de apuntes de Leonardo. Compañero desde su juventud de artistas y artesanos, escribió:

"Bien sé que, al no ser hombre de letras, algunos presuntuosos pensarán que con razón pueden censurarme alegando que soy un inculto. ¡Estúpidos! No se dan cuenta que puedo contestarles con las palabras de Mario a los patricios: 'Aquellos que se adornan con las labores de

---

18 Las ediciones para el lector común, incluso aquellas en italiano, suavizan el deletreo y la gramática leonardinos. Se ha dado demasiada importancia, bien en forma de alabanzas o condenaciones, según el temperamento del escritor, a su talento literario o falta del mismo. Cierto es que su italiano no sólo es dialectal sino a menudo inculto, pero al tiempo hay que reconocer que sus manuscritos son principalmente (aunque no enteramente) colecciones de apuntes diversos, y no proyectos de ensayos, y es tan sólo nuestra propia época la que ha impuesto sobre la Literatura la maldición de escritores que no son más que conductos para conversaciones triviales.

otros no me darán crédito por las mías'. Dirán que, al no ser hombre instruído, no puedo hablar con propiedad acerca de los temas que deseo tratar. Mas no saben que mis temas se rigen por la experiencia y no por las palabras de otros; la experiencia, que siempre acompañó a aquellos que escribieron bien, por lo que la tomo por maestra, remitiéndome a ella en todos los casos." (Atl. 119*v.* a.)

"Aunque no pueda como ellos ser capaz de citar a otros, es algo mucho más valioso poder citar a la experiencia, maestra de sus maestros. Se vuelven hinchados y pomposos, adornándose con los trabajos de otros; ni siquiera reconocen los míos; y si a mí, un inventor, me desprecian, cuánto más serán ellos, ni tan siquiera inventores sino meros trompeteros y recitadores de las obras de otros, despreciados." (Atl. 117*r.* b.)

Desde luego, Leonardo no podía citar en griego como lo haría un humanista, pero el hecho es que tampoco conocía las suficientes matemáticas ni latín como para leer los libros que habían escrito los grandes científicos de los dos siglos anteriores. Aunque en la generación de nuestros padres la ignorancia del latín se consideraba como un signo de independencia intelectual, hoy en día tal ignorancia está tan difundida como para no dar lugar a motivo para enorgullecerse; pero en tiempo de Leonardo, a una persona que no conociera latín le sería tan sencillo estudiar textos científicos como estudiar Cálculo una persona que sólo entendiera el idioma esquimal. Al no dominar el latín, Leonardo quedó apartado tanto de la peste platónica como de un conocimiento directo de las matemáticas y la mecánica de los escolásticos. Durante el período central de las investigaciones davincianas, se solía afirmar que Leonardo estaba familiarizado con los trabajos de Jordanus de Nemore, aunque en ningún lugar lo cita[19], ni tampoco da muestra de la necesaria competencia matemática para entender a las fuentes medievales originales que trataban de las ciencias físicas. Aun estando los comentarios de Leonardo sobre los principios del movimiento más cerca de la ciencia occidental que los puntos de vista de los literatos humanistas, tienen el aspecto de meras divagaciones tomadas de los ambientes universitarios o de simples conversaciones[20]. Incluso diré que me recuerdan las opiniones de ciertos poetas modernos acerca de la Teoría Cuántica o de la fisión nuclear. Hubo que esperar hasta Cardano y Galileo para avanzar en las bases de la mecánica, pues ellos la estudiaron de una manera sistemática y exhaustiva antes de independizarse de sus prodecesores.

Por último, incluso aquellos que tomen en serio los dichos de Leonardo no tienen por qué limitarse a las sempiternas citas alabando el empirismo que hemos mencionado anteriormente. Si así desean, pueden esculpir en su arquitrabe:

"Ningún efecto ocurre en la Naturaleza sin que haya alguna razón. Una vez comprendida la razón ya no se necesita de la experiencia." (Atl. 147*v.* a.)

Quizás fuera en un intento de seguir este lema por lo que estudió la física peripatética y medieval, aunque nunga llegó a dominarlas.

---

19 En Q. Anat. II, 22*v.*, menciona "Giordano de ponderibus", pero no está claro a cuál libro se refiere ni si llegó a verlo siquiera. La gran obra original de Jordanus de Nemore es el *Liber Jordani de ratione ponderis.* Según Moody & Clagett, la obra llamada *Liber Jordani de ponderibus* no muestra "ni el más mínimo vestigio de influencia de las demostraciones que dio Jordanus [Nemorarius]..."

20 Vg., parece que queda malentendido el "impetus" de Buridan en los pasajes en MS E 22*r.*, 40*v.* Asimismo, las siete aserciones acerca de una "potenza" o "virtú" y el "cuerpo" (esto es, el cuerpo de peso dado) que es capaz de mover en un cierto tiempo, las cuales anota Leonardo en MS F 51*v.*-52*r.* (también 26*r.*), no son, como han pretendido algunos, una definición de potencia mecánica sino más bien un mero reflejo de opiniones peripatéticas sobre dinámica. Véase la nota de Uccelli en págs. 306-307 de Leonardo da Vinci, *I Libri di Meccanica,* Milán, Hoepli, 1940.

10. El movimiento uniformemente acelerado en el vacio y sobre el plano inclinado

De todos los descubrimientos sobre los principios de la mecánica anteriormente atribuídos a Leonardo, hoy en día solamente queda uno del que no se haya demostrado que pertenezca a un autor anterior. Los escolásticos medievales inventaron y demostraron los teoremas cinemáticos del movimiento uniformemente acelerado; pero no dijeron nada acerca de cómo producirlo[21]. John the Grammarian, quien escribió más de 3.000 páginas de comentarios sobre Aristóteles durante los siglos V-VI, había observado acerca de la opinión que sobre la caída libre tenía Aristóteles:

"Es completamente errónea, y esta opinión nuestra es comprobable por observación mejor que recurriendo a ningún argumento verbal. Pues si uno deja caer desde la misma altura dos pesos, de los cuales uno tiene muchas veces el peso del otro, se observa que la razón de los tiempos empleados en el movimiento no depende de la razón de los pesos, sino que la diferencia entre los tiempos es muy pequeña."

No obstante, afirma con toda claridad que este hecho experimental se refiere al movimiento en el seno de un medio; piensa que en un vacío la velocidad de caída sería proporcional al peso. Leonardo escribió mucho acerca de la caída de los cuerpos, pero nunca decía si consideraba la resistencia del aire o no. Cuando proyectó el experimento de dejar caer dos terrones de azúcar desde un campanil, pesando uno dos onzas y el otro una, aconsejó que se fijara uno en el más ligero y marcar el ladrillo frente al cual pasara en el instante de oírse al pesado golpear el suelo primero (MS A 30*v.*). No nos cuenta si llevó a cabo este experimento alguna vez. También,

"Si dos cuerpos esféricos y distintos, pesados y del mismo material y origen, caen de mayor a menor altura, uno de ellos caerá mucho más rápidamente que el otro a medida que su diámetro tiende al de éste último." (MS A 22*v.*)

Otros dos pasajes resultan contradictorios:

"Así pues, cada vez que el tiempo se duplica, el cuerpo que cae duplica la longitud de su descenso y la velocidad de su movimiento." (MS M 44*v.*, véase 45*r.*)

Aquí afirma que tanto el desplazamiento como la velocidad aumentan en progresión aritmética[22]; si hubiese entendido los teoremas cinemáticos de Merton, se habría dado cuenta de que esta afirmación se contradice a sí mismo. Por último,

"El cuerpo que se mueve con movimiento natural adquiere en cada estadio de movimiento estadios de velocidad; tales estadios (de velocidad) se encuentran en la misma proporción el último respecto al penúltimo como el segundo respecto al primero." (Forst. II[2] 152*v.*)

Aquí tenemos el primer[23] enunciado conocido para la ley de la caída libre.

---

21 Tomas Bradwardine había inferido de sus hipótesis que "todos los cuerpos mixtos de composición semejante se moverán a velocidades iguales en un vacío". De acuerdo con posteriores puntos de vista, este famoso principio de "igualdad de velocidades en el vacío", también a menudo atribuido a Galileo, es o bien incorrecto o bien muchísimo menos concreto que la afirmación de que la gravedad terrestre acelera uniformemente a un cuerpo en un vacío.

22 Para lo mismo, en mayor extensión y con un diagrama al estilo de Oresme, véase MS M 44*r.* & *v.*, 45*r.*, 47*r.* & *v.*, 48*r.*, 49*r.*

23 Cita Clagett, en págs. 553-556 de *The Science of Mechanics in the Middle Ages*, una afirmación poco clara de Oresme que tal vez posea el mismo significado, y atribuye la primera publicación a Domingo de Soto, 1555.

Pero esto no es todo. Leonardo también estudió el problema del movimiento sobre un plano inclinado. Y parece haber sido el primero en estudiarlo. Mientras que sus diagramas indican que intentaba tomar en cuenta el efecto del tamaño de la bola sobre el movimiento, cosa que le habría resultado imposible calcular, el texto que acompaña a los diagramas dice:

"el objeto bajará por la línea *bc* tanto más lentamente que por la *bd* cuanto aquella línea tiene mayor longitud que la *bd,* siendo los cuerpos de igual peso, igual redondez, y moviéndose de la misma manera, lo cual es imposible". (MS M 42*r.*) (fig. 13).

En otros dos párrafos (MS A 33*r.*, Atl. 210*v.* a), llega con aún mayor claridad al mismo resultado, que todos hemos aprendido, en distintos términos, en la escuela: los tiempos de descenso sobre planos inclinados, varían inversamente con los senos de los ángulos de inclinación. Buena oportunidad para los que creen en el "genio". ¿Cómo obtuvo Leonardo este resultado? ¿Mediante experimento? ¿Teoría? ¿Una conjetura plausible? Para la primera posibilidad no tenemos evidencia; para la segunda no había entonces ningún punto de partida. En otros muchos ejemplos sabemos que Leonardo solía enunciar posibles leyes basadas en proporciones sencillas, y que normalmente le salían mal. Pero ésta última vemos que es correcta. ¿Lo sabía Leonardo? ¿No sería ésta para él una más de los centenares de reglas lineales que llegó a enunciar pero nunca a comprobar, con la única diferencia de que esta regla trataba un problema del que más adelante se vería su importancia central? ¿Y no le saldría correcta esta regla por casualidad?

Me temo que sí. Recordemos que Leonardo propuso varias leyes lineales, mutuamente contradictorias, para la caída libre de los cuerpos, y tal vez al tiempo de enunciar la única que resulta ser correcta, se olvidó de repetir las restantes que son incorrectas.

Los hechos de que disponemos están bien claros:

1. En la física algunas relaciones son lineales y otras no lo son;
2. Leonardo *nunca* propuso ninguna relación que no fuera lineal[24];
3. Leonardo *sí* que llegó a formular docenas de relaciones lineales;
4. De 1. y 3. es de esperar que algunas de las leyes propuestas por Leonardo sean correctas.

Si solamente se consideran sus éxitos y no se toman en cuenta sus afirmaciones manifiestamente incorrectas, se obtiene una imagen muy distorsionada de su capacidad como filósofo natural. No podemos estar seguros del orden en que Leonardo escribió sus diversas afirmaciones. Si, como ocurre a menudo, en un momento dado enuncia una de sus afirmaciones proféticas que hoy en día se considera incorrecta, y en otra ocasión, afirma lo contrario, como por ejemplo, sucede con sus especulaciones sobre el movimiento continuo, dicen de la primera que es tan sólo una hipótesis especulativa y de la segunda que representa su "descubrimiento" final. Sin embargo, a mi parecer, no es ninguna ley de la naturaleza que los productos de una mente especulativa tengan que ir mejorando con la edad.

---

[24] Evidentemente, pues era insuficiente su conocimiento de la matemática para permitirle considerar cuantitativamente relaciones que no fueran de este tipo.

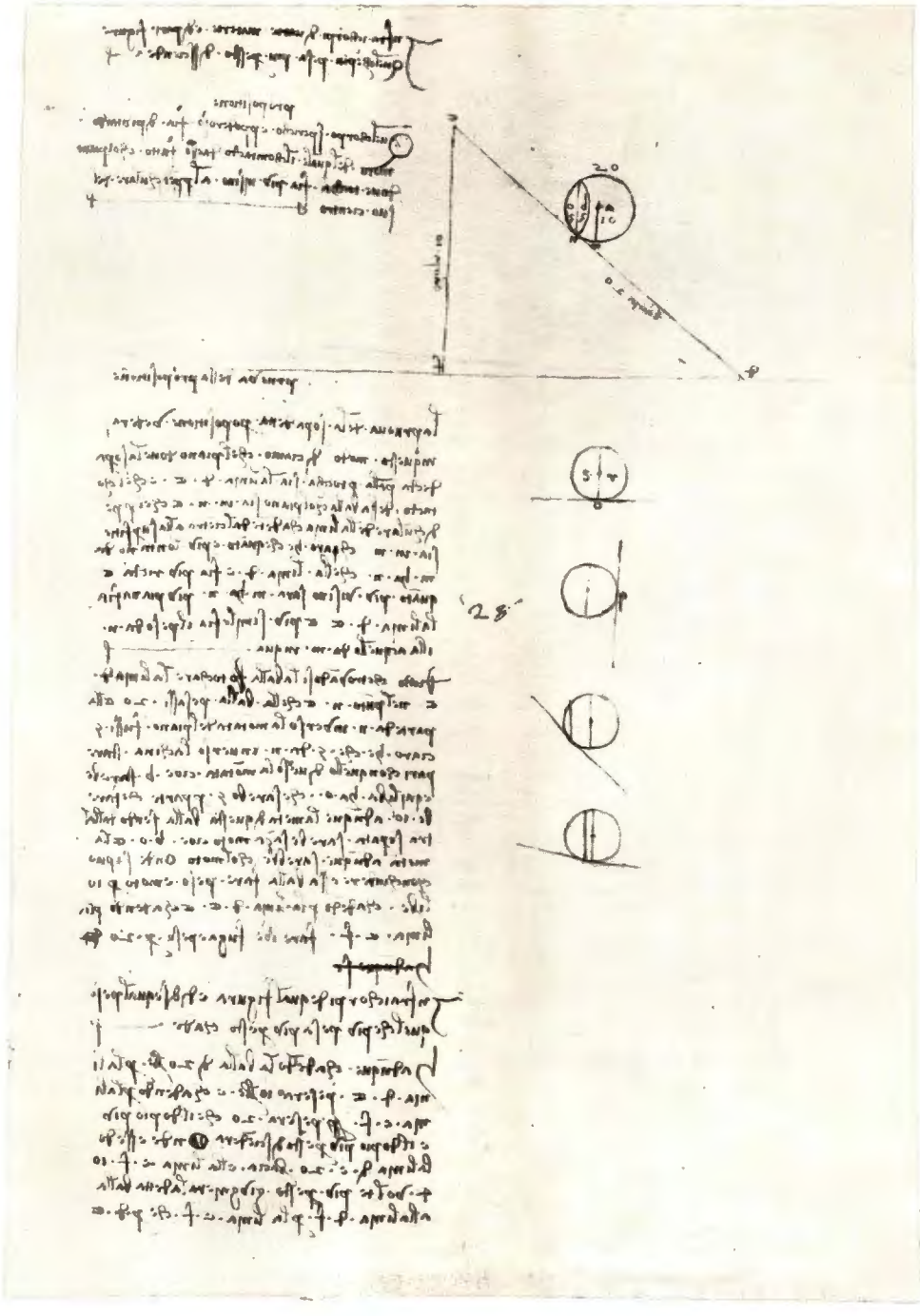


Fig. 12. Atl. 338r.b, con el diagrama de Leonardo de una pelota sobre un plano inclinado (por cortesía de la Biblioteca Ambrosiana, Milano)

Fig. 13. MS M 42*r.*, mostrando el enunciado dado por Leonardo de la regla correcta para movimiento sobre un plano inclinado (por cortesía del Institut de France)

11. LEONARDO Y SU METODO DE INVESTIGACION, II

Ahora podemos intentar resumir el método que parece haber seguido Leonardo, sin duda inconscientemente, para tratar los problemas científicos:

1. Observar el fenómeno en cuestión y anotar las magnitudes que posean un valor numérico y que parezcan influenciarlo;
2. Plantear tales relaciones lineales entre pares de estas magnitudes que no estén en contradicción evidente con la experiencia;
3. Sugerir la comprobación mediante experimento de estas reglas de tres.

Excepto en un caso, ya mencionado, no consta evidencia de que jamás llegara al paso siguiente, que parece obvio: realizar los experimentos propuestos.

De aquí que un historiador[25] reciente haya escrito:

"...estrictamente hablando, Leonardo, a pesar de sus grandes dotes de observador, no jugó ningún papel en el proceso... por el que surgió la ciencia moderna...

"1. Leonardo no fue un científico en el sentido en que entendían la ciencia él y sus contemporáneos ni tampoco en cualquier otro sentido que se haya tomado para la ciencia...
"2. En los códices de Leonardo no se descubre una sola idea científica teórica que fuera esencialmente nueva o siquiera desconocida en las escuelas científicas de la Italia de su época. A partir de la primera impresión causada por sus códices en 1881 surgió, cosa bastante natural, una valoración de ellos considerándolos repletos de ideas asombrosamente originales; valoración nacida de la gran ignorancia que en aquel entonces existía de los logros conseguidos por los científicos contemporáneos de Leonardo.
"3. Aun en el caso de que Leonardo hubiera tenido ideas científicas originales, tampoco cabría afirmar que ocupara un puesto o que hubiese ejercido influencia alguna en el nacimiento y desarrollo de la ciencia moderna ya que estas ideas suyas permanecieron en la oscuridad hasta la publicación de los códices en París, 1881-1891, y del Códice Atlántico en 1894."

Se cantó este panegírico con motivo del 500 aniversario del nacimiento de Leonardo. (Quizá para el 600-avo, el Arte habrá progresado tanto que el mundo se enterará por boca de un historiador de Arte de que no fue siquiera artista.)

Ya sé que resulta imposible decir nada acerca de Leonardo sin indignar a uno u otro sector del público. Pues para coexistir pacíficamente con la imagen standard que comparten conjuntamente la masa inculta y el 99 por 100 del profesorado universitario, de primeras uno ha de llamarle "genio" y hablar de él siempre en términos superlativos. El iniciado en Historia habrá de verle más bien como un artista dotado de una curiosidad incansable que aprendió algo de ciencia. El inclinarse respetuosamente ante la opinión general, venerándola como un credo religioso que no hay por qué aceptar, no implica que la alternativa del historiador sea la única posible. No me parece relevante el plantearse el problema de si Leonardo fue o no un "científico", cualquiera que sea la definición que se tome para tan fea palabra. Lo que sí parece obvio es que *cualquier* persona del siglo XV que escribiera tanto sobre mecánica como Leonardo, fuera o no capaz de pintar y diseñar fuentes, merece la cuidadosa atención de todo aquel que estudie hoy en día los orígenes de la mecánica. No se le puede reprochar el que no fuera el genio universal ni el visionario profé-

---

25 J. H. Randall, Jr., "The place of Leonardo da Vinci in the emergence of modern science", págs. 207-218 de *Roots of Scientific Thought*, N. Y., Basic Books, 1957.

tico que nos presenta su imagen popular. La culpa recae sobre la ansiosa credulidad de aquellos profanos que insisten en considerar la ciencia como algo mágico, revelada por inspiración mística a unos pocos elegidos. Estos quedan elevados a objetos de una devoción que sólo tiene equivalente en la que muestran los profesores de literatura por Shakespeare y Boswell. Aunque puede que se den tales genios nigrománticos en la religión, la política, o el folklore, nunca han existido en la ciencia. El reducir a sus justas proporciones la tan desorbitada imagen popular de Leonardo no es una mera crítica académica sino un preludio desgraciadamente necesario para cualquier estudio desapasionado de sus trabajos en filosofía natural. Concedido que los historiadores han demostrado de una manera concluyente que él no inventó la mecánica de Galileo, como tampoco lo hizo el propio Galileo, pero está claro para aquellos que han sobrepasado los rudimentos de la mecánica que esta ciencia no se limita a meras variaciones sobre la fórmula $s = \frac{1}{2} gt^2$. A pesar de los ríos de tinta vertidos por tantos literatos en alabar a Leonardo, sus palabras y sus dibujos han quedado intactos. Concedido que, contrariamente a la imagen folklórica de su personalidad y su obra, Leonardo no descubrió *todo;* pero sí descubrió *algo,* como hemos visto antes, y en contra de los tan despreciativos párrafos arriba citados[26]. Vamos a investigar con mayor profundidad algunos de sus más sólidos, bien que limitados hallazgos.

12. Ciencia y arte

A menudo oímos que tan sólo un artista puede hablar de Leonardo, pues éste fue ante y por encima de todo, un artista. Diez cuadros producidos a lo largo de una vida de 70 años, la mitad de ellos inacabados, no justifican el decir de un hombre que fue un artista salvo en el caso de que no se dedicara a otra cosa. Pero Leonardo tan sólo ocupó una pequeña parte de su tiempo en lo que ahora se consideran trabajos propios de un artista. Era un hombre polifacético que se interesó por todo. Un ideal del Renacimiento fue "l'uomo universale", el hombre que abarcara todos los aspectos de la ciencia y del arte. Leonardo intentó en vano llegar a una perspectiva universal de la ciencia: al faltarle una mente ordenada y el dominio de las matemáticas, nunca llegó a ser un erudito de la ciencia. Si no tomamos en cuenta el rigor formal y la disciplina mental que exigen los estudios científicos propiamente dichos, veremos en Leonardo al hombre capaz de hacerse notar por sus aportaciones a multitud de disciplinas. A menudo se dice que para enjuiciar a tal personalidad es necesario un panel de expertos que se distribuyan entre sí los diversos aspectos de su obra. Esto se puede tomar, bien como un cumplido a su genio, bien como censura a la típica incultura de nuestra época, comúnmente llamada "especialización". Quizás también esto refleja la aparente antítesis entre la "ciencia" y las "humanidades": el artista debe investigar el carácter artístico que puedan tener los inventos de Leonardo, mientras que el científico debe estudiar los fundamentos científicos de sus cuadros. Esta antítesis, nacida en los excesos del irracionalismo romántico, que

---

26 Además, es injusto Randall al concluir que sólo aquellos que sean ignorantes de la mecánica medieval pueden encontrar originalidad en la ciencia de Loenardo. Roberto Marcolongo, destacado experto en la mecánica de su tiempo, fue un diligente y comprensivo lector de las fuentes medievales citadas por Duhem, no obstante, sus conocimientos no le impidieron que, en un brote de entusiasmo hacia su gran compatriota, ¡concediera a Leonardo la prioridad en el enunciado de la primera y tercera leyes de Newton!

pasó de la Revolución francesa a Napoleón, Wagner, Picasso, hasta Hitler y la Era Nuclear de nuestros días, es una equivocación tan triste como vulgar. No pasa de ser una excusa pueril para justificar un crimen contra el intelecto. Todo el mundo tiene, sin ser por ello un zoquete, sus lagunas intelectuales, pero no por ello debe glorificarse al oscurantismo como una nueva forma del saber. Aunque resulte anticuado confesarlo, creo que un buen pintor es perfectamente capaz de razonar[27] y aprender las leyes de la naturaleza. Asimismo, estoy convencido que todo matemático busca belleza en la Matemática. Puede ser cierto que aquellos que han hecho profesión de ser intuitivos tengan demasiada pereza como para doblegarse a la disciplina científica; lo que sí es seguro es que un científico que carezca de intuición en verdad no es un científico. La Matemática es el paraíso de la intuición disciplinada; en la pintura, como en la Matemática, el impulso en bruto y sin disciplinar, que desprecia los cánones tradicionales, no puede producir más que las modas pasajeras que nos inundan regularmente y que tanto los museos como los críticos y "merchantes" intentan hacernos degustar. Sólo un farsante reclama para su oficio unos patrones exclusivistas con los que defender su mediocridad ante aquellos que acusa de no estar calificados para juzgarle. Tanto como pintor, como matemático, y como físico, el método y la manera de expresarse de Leonardo se mantuvieron inmutables: en todos los campos, su vista y sus manos iban por delante de su cerebro y su espíritu.

13. LEONARDO COMO MATEMATICO

Es necesario examinar la competencia de Leonardo como matemático antes de proceder a un estudio detallado de sus escritos sobre Mecánica, pues su capacidad como tal es un factor determinante de todos sus trabajos científicos. El escribió,

"...la mecánica es el paraíso de las ciencias matemáticas, porque en ella se encuentran los frutos de la matemática." (MS E 8*v.*),

y también:

"No existe ninguna verdad a la que no se pueda aplicar una ciencia matemática o bien una ciencia derivada de las ciencias matemáticas." (MS G 96*v.*),

y además:

"Así pues, alumnos, estudiad matemáticas y no construyáis sin cimientos." (Quad. Anat. I 13*v.*),

y por último:

"Que no me lea aquel que no sea matemático de mis principios." (Quad. Anat. IV 14*v.*)[28]

---

[27] Véase la famosa glosa que escribió Goya para el núm. 43 de los *Caprichos*, el cual inicialmente había pensado poner como el núm. 1:
"La imaginación abandonada por la razón crea pensamientos imposibles e inútiles. Unida a la razón, la imaginación es la madre de todo arte y la fuente de toda su belleza."

[28] No está claro el significado de esta máxima: "No mj leggha chi non e matematicho nelli mja pricipj." Los entusiastas italianos que la citan no están de acuerdo en sus conversiones tácitas de esta afirmación a un italiano gramáticamente correcto, y son varias las traducciones inglesas, Vg., "Let no one read me who is not a mathematician in my beginnings" ('Que nadie me lea que no sea matemático en mis comienzos') (MacCurdy), y "Let no man who is no mathematician read the elements of my work" ('Que ningún hombre que no sea matemático lea los elementos de mi obra') (Goldscheider).

Pero estas frases lapidarias no tienen más valor que el que se le puede dar al lema de Platón: "No entre nadie aquí sin saber geometría", y este lema puede entenderse como un consejo para que todo el que desee entrar aprenda geometría antes de hacerlo, pues una vez dentro, de seguro que no aprenderá nada de ella. Así ocurre con Leonardo. Algunos de sus párrafos matemáticos son simples lecciones elementales de Euclides tomadas, y mal recordadas, de las traducciones más corrientes en su época. No tenía conocimiento de los problemas más profundos de la geometría griega, tales como la teoría de las cónicas, la construcción de números irracionales, o el método de agotamiento. Despreciando la restricción clásica a la regla y el compás, a él le bastaba con una solución aproximada. Por ejemplo, nos dice:

"...Arquímedes jamás encontró la cuadratura de ninguna figura con lados curvos, pero yo he obtenido la cuadratura del círculo excepto por la porción más pequeña que puede concebir el intelecto humano, esto es, el punto más diminuto que aún resulte visible." (Windsor Drawings 12280*v.*)

Esta manera de pensar no tiene nada de matemática y lo cierto es que Leonardo no sentía la necesidad de utilizar definiciones y pruebas matemáticas. Además, por grande que fuera la admiración que sintiera hacia Arquímedes, es evidente que al tiempo de escribir el fragmento arriba citado, desconocía los trabajos de Arquímedes sobre cuadratura de figuras curvas.

La época y el país de Leonardo fueron los de una gran escuela de algebristas: Scipione del Ferro (1465-1526), Antonio Fior (c. 1535), Tartaglia (1499-1557), Cardano (1501-1576), y Ferrari (1522-1565). A estos hombres les resultaba sencillo resolver una ecuación cuadrática. Ellos fueron los que descubrieron las soluciones generales de las ecuaciones de tercero y cuarto grados y se esforzaron en encontrar soluciones para algunas de grado mayor. La labor de esta escuela ya comenzó en vida de Leonardo, pero él ni tomó parte en sus trabajos ni parece haberse fijado en su existencia; jamás pudo resolver correctamente una ecuación cuadrática e incluso tenía dificultades[29] con las ecuaciones de primer grado. Como sólo sabía sumar quebrados a ojo, y a menudo se equivocaba, no es de extrañar que ignorara los problemas numéricos que estudiaron algunos italianos medievales como Leonardo Fibonacci de Pisa (1170-1250). Aunque adoraba a la Matemática como a una diosa, fue tan inconstante con ella como con sus otras musas y se puede decir que ella le correspondió con muy pocos favores[30].

No se debe juzgar a un hombre tan sólo por sus amigos, pero no pasarse por alto que Leonardo escogía los suyos de entre artesanos y gente no muy erudita. Se suele mencionar que fue amigo y colaborador del matemático Luca Pacioli, pero sin

---

[29] Hasta Marcolongo ha de concordar en esto. En la pág. 156 de su *Leonardo da Vinci, Artista-Scienzato,* Milán, Hoepli, 1939, cita dos vagas referencias de Leonardo con relación al álgebra y continúa: "Pero más allá de estas diversas y breves observaciones, nunca emprendió el estudio del álgebra. Es cierto que algunas cuestiones mecánicas sencillas... llevan a ecuaciones lineales fáciles, pero Leonardo nunca las resuelve, ni siquiera en los casos más simples, mediante el álgebra, y en casos de alguna complejidad los resultados son incorrectos."

[30] Después de acabar mi estudio de los manuscritos de Leonardo me encontré con el artículo del respetado matemático U. Cisotti, "The mathematics of Leonardo", págs. 201-203 de *Leonardo da Vinci,* N. Y., Reynal & Co., s. f. [1963], escrito alrededor de 1938. Allí se presenta un justo resumen del lado positivo de los estudios matemáticos de Leonardo. Con el tacto elegante característico de las evaluaciones italianas de colegas suyos, vivos o muertos, concluye Cisotti: "no añade nada al esplendor de la figura polifacética de Leonardo el destacarle como matemático..."

Fig. 14. Retrato de Luca Pacioli y un alumno, pintado por un artista desconocido (fotografía por cortesía de la Soprintendenza Gallerie Napoli)

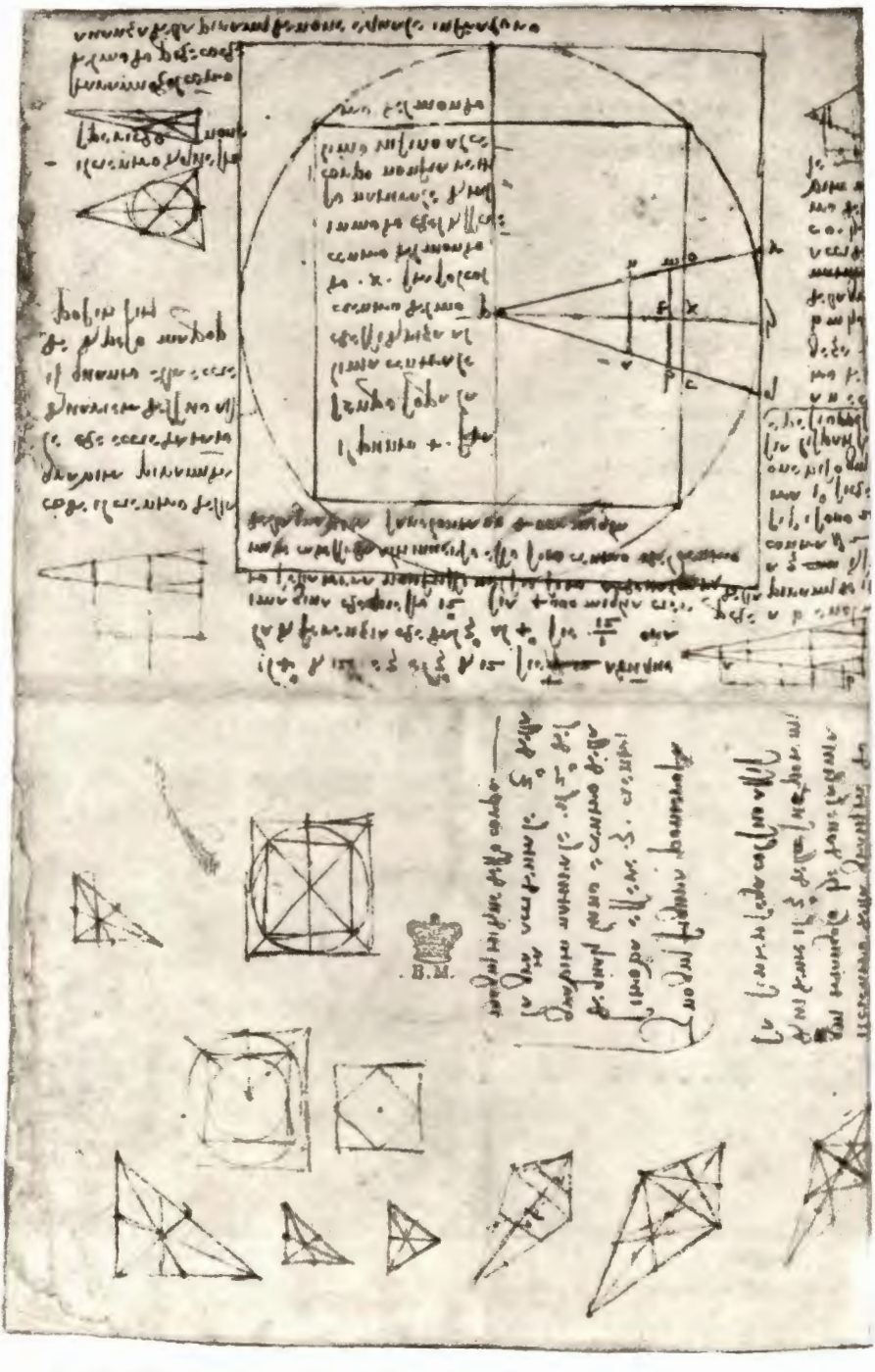


Fig. 15. Atl. 194*r.*a y Arund. 72*v.*, mostrando los croquis de Leonardo para el centroide de un triángulo (por cortesía de la Biblioteca Ambrosiana, Milano, y de los Fideicomisarios del British Museum)

aclarar que Pacioli, más que pensador, fue un místico. Puede que aprendiera algunos rudimentos de geometría gracias a Pacioli, pero nadie podrá quitarle el mérito de haber basado sus opiniones sobre la proporción en el Arte en su propia experiencia y no en los absurdos juegos numéricos de Pacioli sobre la "proporción divina".

El único descubrimiento matemático original de Leonardo se debió a sus excepcionales poderes de observación: Desde antiguo se conocía el hecho de que el centro de gravedad de un triángulo se encontraba en el punto de intersección de sus medianas. En cierta página (Atl. 194*r. v.*) (fig. 15), se observan dieciséis intentos suyos por demostrar este resultado, todos ellos infructuosos. A pesar de no ser válidas estas demostraciones, aclaran la manera en que atacó este problema. Podemos leer,

> "Todo diámetro divide un triángulo en dos partes de igual peso; de aquí que este diámetro contenga en sí mismo el centro de gravedad de todo el triángulo..."

Luego Leonardo estaba pensando en términos de movimiento: si se apoya el triángulo a lo largo de la mediana sobre el filo de una cuchilla, tiene igual tendencia a caer de un lado que del otro, permaneciendo, pues, inmóvil. En varias otras páginas[31], se plantea el problema de hallar el centro de gravedad de una pirámide. Algunos párrafos dan respuestas confusas o incorrectas, pero en la mayoría de ellos se afirma que la altura del centro de gravedad es la cuarta parte de la altura de la pirámide; en ninguna parte aparece una demostración, pero en uno de sus intentos llegó a construir el plano diametral de una pirámide. Quizá la mejor manera de sintetizar su método sea decir que "veía" el centro de gravedad equilibrando mentalmente la pirámide y reflejándola en sus dibujos (figs. 16 y 17).

Otro ejemplo del método seguido por Leonardo nos lo proporciona un problema planteado por Ibn-Al-Haitham (965-1020), conocido en Occidente por Alhazen. Se observa una vela reflejada en un espejo esférico (fig. 18): de entre todos los rayos que parten de ella, ¿cuál es el que llega al ojo? La ley de la reflexión exige que cualquier rayo que llegue al espejo salga con un ángulo igual al de incidencia. Al ser puramente geométrico el problema, lo podemos visualizar mediante un sistema mecánico: sea una mesa de billar con forma circular y dos bolas situadas sobre ella. ¿Hacia qué punto de la banda debemos impulsar una de ellas para que golpee a la otra en el primer rebote? Sin duda que supo de este problema gracias a algún libro de óptica, quizás incluso del propio libro de Ibn-Al-Haitham; ahora bien, es indudable que no pudo entender la complicada solución dada por Ibn-Al-Haitham, pues ésta utilizaba la teoría de secciones cónicas. Por su parte, Leonardo halló una solución bien distinta, puramente mecánica y basada en una geometría muy sencilla (Atl. 191*r.* a)[32].

Trácese desde el centro del espejo un radio cualquiera. Desde el ojo y desde la vela trácense rectas que formen ángulos iguales con el radio en un punto arbitrario *P*. Manteniendo invariable esta disposición, gírese el radio del espejo hasta que el punto *P* toque al espejo en un cierto punto *C*. Entonces *C* nos da la solución. Para llevar a la práctica esta construcción geométrica, Leonardo diseñó un sistema articulado

---

31 Arund. 65*r.*, 123*v.*, 124*r.*, 193*v.*, 218*v.*; Atl. 73*r.* b, 100*v.* c, 146*v.* c; MS K 89 9*r.*, MS F 51*r.*; y otros.

32 Este trozo lo analizó R. Marcolongo, "Lo strumento inventato da Leonardo da Vinci per la risoluzione del problema di Alhazen", *Rend. Accad. Sci. Fis. Nat Napoli* (3a) 34, 22-24 (1928).

Fig. 16. Arund. 123*v*., demostrando el discernimiento de Leonardo con respecto al centro de gravedad de un tetraedro (por cortesía de los Fideicomisarios del British Museum)

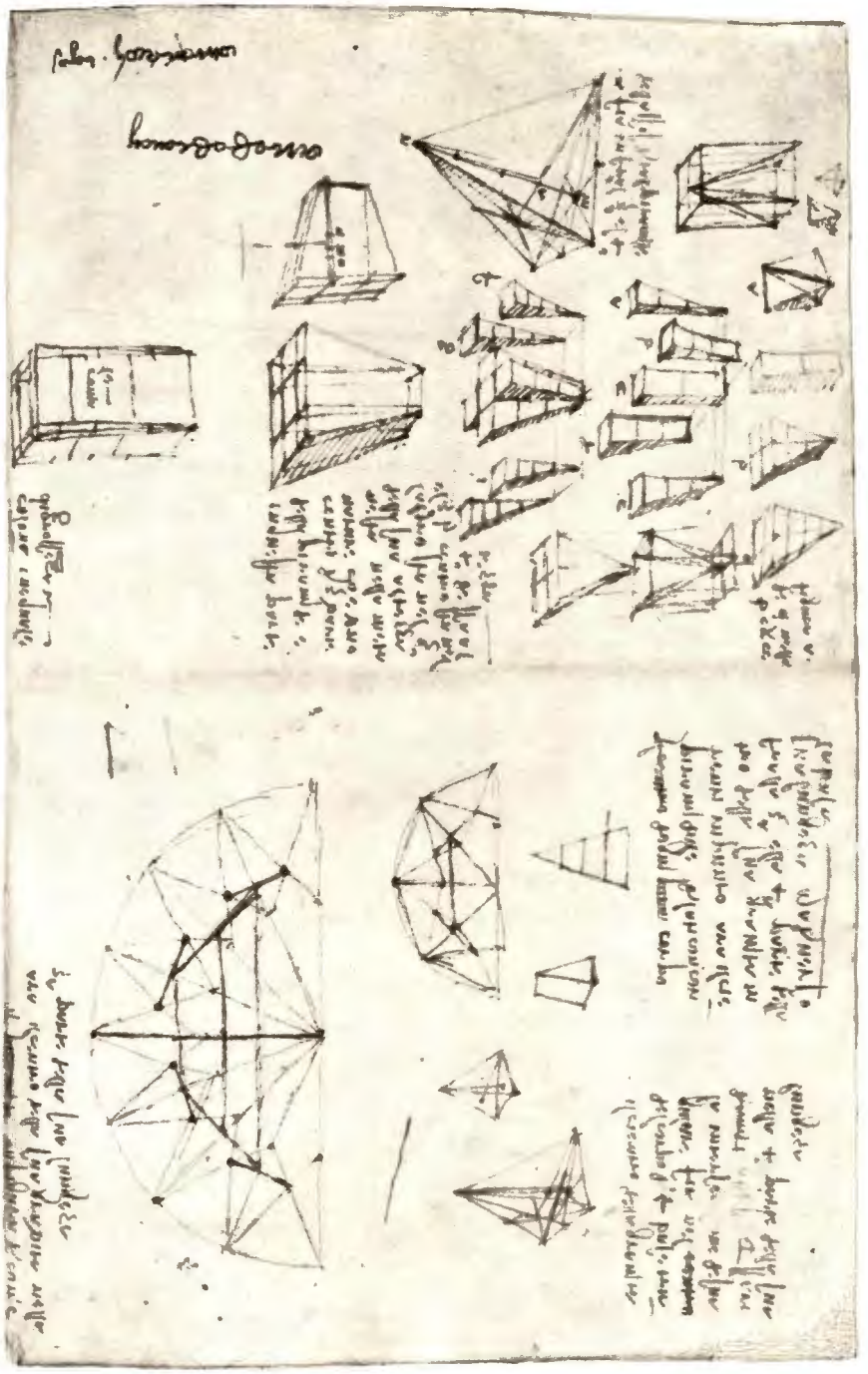


Fig. 17. Arund. 193*v.*, con los estudios leonardinos de los centroides de pirámides (por cortesía de los Fideicomisarios del British Museum)

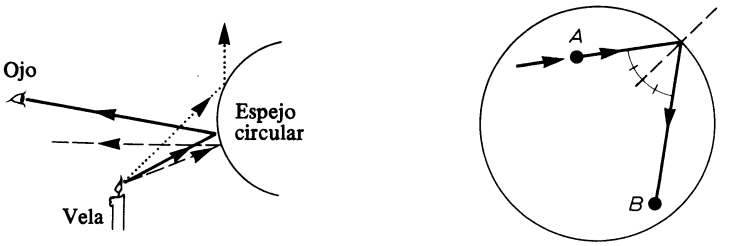


Fig. 18. Diagramas del problema de Alhazen y el de la mesa de billar circular

compuesto por cinco varillas rectas (figs. 19, 20): sea una primera varilla ranurada unida al centro del círculo; sean otras dos varillas, también ranuradas, que permiten alterar las posiciones relativas del ojo y de la vela. Estas dos últimas varillas forman ángulos iguales con la primera por estar unidas a ella en su punto de intersección mediante un pasador y fijadas por dos de sus extremos a sendas varillas de igual longitud también sujetas por sus extremos libres mediante un pasador que corre a lo largo de la primera varilla del sistema. Esta elegante construcción tan sólo se basa en dos teoremas geométricos: *a)* la diagonal de un rombo es bisectriz de los ángulos interiores; *b)* el radio de un círculo es perpendicular a la tangente en el punto de tangencia.

Todos nosotros, incluso los hombres de Letras, hemos aprendido estos dos teoremas en la escuela. Pero ¡qué pocos, sin exceptuar a los matemáticos profesionales, serían capaces de imaginar una construcción tan elegante! En vez de calcular una solución, Leonardo, diseñando una máquina apropiada, la dibuja. De hecho, ésta es una de las primeras máquinas matemáticas. Lo cierto es que Leonardo fue de los primeros en diseñar sistemas articulados para transformar entre sí movimientos lineales, recíprocos, y circulares. Y estos esquemas ayudan a comprender algunas de sus observaciones acerca de la geometría; él nos dice, por ejemplo:

". . .punto no es parte de línea." (Tr. 34*r.*),

pero también dice:

"Línea es una longitud creada por el movimiento del punto..." (Arund. 160*r.*),

y

"La línea es el pasar del punto, y los puntos son las fronteras de la línea."(Arund. 176*r.*),

y continúa hablando de esta manera acerca de las superficies y los cuerpos. Aunque estos conceptos no le llevaron a obtener resultados concretos, sí que sugieren una visualización del espacio-tiempo a la que, yo por lo menos, no he encontrado antecedente. Cierto historiador[33] ha escrito que estas ideas anuncian "un mundo visto a través del Cálculo —como el mundo de Leibniz—". Estos párrafos nos permiten una mejor comprensión de los éxitos y los fracasos de Leonardo. Para el teórico Alberti, una línea no era más que la totalidad de sus puntos y se obtenía proyectando éstos uno a uno. Para Leonardo, una línea es aquello que traza un lápiz en

33 Randall, *op. cit.*, pág. 39.

Fig. 19. Atl. 181*r*.a, incluyendo el tratamiento dado por Leonardo al problema de Alhazen (por cortesía de la Biblioteca Ambrosiana, Milano)

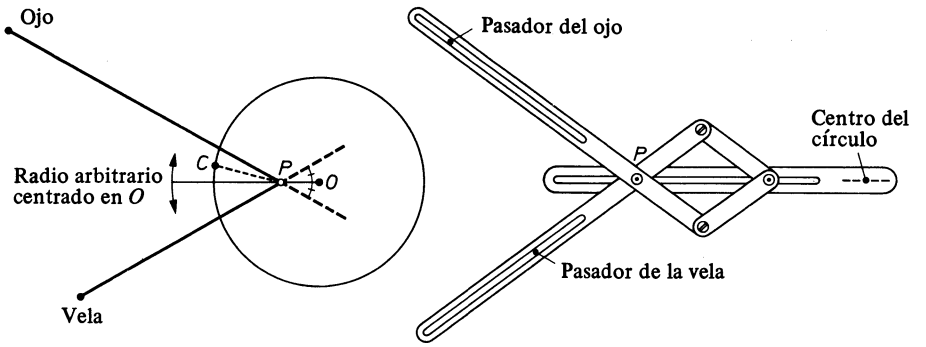


Fig. 20. La solución y el sistema articulado de Leonardo, según la interpretación y realización de Marcolongo

movimiento. Sus pinturas, sus máquinas y su mundo estaban todos construidos mediante tales líneas, nacidas en el movimiento.

La palabra "forza" que tan a menudo escribe la pluma de Leonardo no llega a alcanzar el rango de magnitud física, quedándose en elocuencia confusa. El no podía entender las teorías cinemáticas de los escolásticos medievales a falta del instrumento matemático, pero sí que podía observar movimientos. Y aunque las fuerzas que daban lugar a estos movimientos quedaban para él en el mundo de las sombras, los movimientos por sí solos constituían los elementos de su mundo. El no era el hombre capaz de teorizar y crear el nexo entre cinemática y dinámica, entre movimientos y fuerzas. Pero sí fue capaz de ver los movimientos, representarlos, y relacionarlos entre sí.

14. PERSPECTIVA Y MOVIMIENTO EN LA PINTURA DE LEONARDO

Cabría esperar que dado su talento para visualizar las matemáticas, Leonardo ejerciera una gran influencia en el desarrollo de la perspectiva. Se le consideraba, ya poco después de su muerte, como uno de los inventores del sistema de perspectiva utilizada en Italia durante el Alto Renacimiento, aunque resulta difícil de evaluar exactamente cuál fue su contribución[34]. Vasari nos habla en los siguientes términos acerca de las aportaciones de Leonardo a la pintura:

"Leonardo... fue el iniciador del tercer estilo, que he dado en llamar moderno, notable por el atrevimiento en el diseño, por la más sutil imitación de la Naturaleza hasta en sus detalles más insignificantes, buen canon, un orden excelente, proporciones correctas, diseño perfecto y gracia divina, prolífico y llegando a las mismas raíces del arte, cobrando sus figuras aliento y animación."

---

34 Para una discusión de la perspectiva leonardina, véase la parte final del artículo de John White, "Developments in renaissance perspective - 1", *J. Warburg Inst.* 12, 58-79 (1949). Parece ser que White considera que las ideas de Leonardo acerca de la perspectiva "no son... del tipo que tendría una influencia inmediata sobre artistas practicantes...", pero su artículo trata sólo la perspectiva en el sentido estrictamente geométrico, no el de la "perspectiva del color" a veces atribuida a Leonardo.

Esto es simplemente el juicio de un pintor para con otro. Los escritores a menudo desprecian a Vasari, quizás porque les resulta demasiado directo. Vasari tan sólo siente admiración por Leonardo, pero es la clase de admiración que pudiera sentir hoy en día un científico por la labor de otro: no es un éxtasis sublime, ni un arrebato cósmico, sino la simple afirmación de que destacaba en todas las actividades propias de un pintor. Aunque al abordar el problema de la esencia del Arte se corre el riesgo de entrar en una discusión académica, yo sugiero a aquellos que le reprochan a Vasari el fijarse tan sólo en los aspectos técnicos del arte de Leonardo que tal vez estén pasando por alto la posibilidad de que el Leonardo verdadero, desmitificado, se refleje precisamente en su técnica artística, y que sea éste el Leonardo renacentista antes que el ídolo místico de los estetas. Vasari describe a la *Mona Lisa* como "una copia exacta de la naturaleza". El hecho de que el propio Vasari no habría podido ver el original de la *Mona Lisa,* da fuerza a mi argumento puesto que se limita a informarnos acerca de la opinión general entre los artistas de su tiempo. El descubrir infinidad de significados psicológicos en un cuadro tal vez represente un tributo a la excesiva sensibilidad de ciertos críticos de arte actuales, pero bien puede ser que no tenga nada que ver con el propio Leonardo como objeto de estudio histórico. Cualquier persona lo suficientemente esteta podrá quedarse embobada ante un grupo de árboles, un montón de piedras, o incluso en la actualidad, ante una pila de trapos viejos; con todo, no se le ocurrirá sugerir que algún gran precursor del arte moderno tuviera necesariamente que plantar los árboles, amontonar las rocas, o vaciar la bolsa de la ropa. El intentar ver en la *Mona Lisa* algo más que un magnífico retrato a la misma altura que los mejores de Giovanni Bellini, Antonello da Messina, Raphael, y Tiziano es querer dotar a Leonardo de una psique maldecida con todos los -ismos de nuestra época. Así, uno de los pocos cuadros que llegó a acabar Leonardo, el retrato de Ginevra de'Benci, a pesar de la copiosa documentación que se tenía sobre este cuadro, hasta 1939 era generalmente atribuido a su discípulo Lorenzo di Credi. Al postergar esta gran pintura como obra de un artista de segunda fila, los críticos del siglo pasado y del primer cuarto de éste le denegaban este misticismo único y superlativo que ellos veían en otras obras de Leonardo —esas cualidades que, según ellos, sólo él poseía. La reciente venta espectacular de la Ginevra a un precio récord demuestra que la vieja imagen de Leonardo, la imagen que aparece en tantos libros para profanos y que éstos aceptan y exaltan, va siendo considerada por los historiadores de arte como, si no absolutamente falsa, sí al menos incapaz de dar cuenta de las pocas obras suyas conocidas. Aunque Vasari tan sólo calificó a la Ginevra de "bello retrato", merece también su alabanza de la *Mona Lisa,* "copia exacta de la naturaleza", tomando las palabras en su sentido etimológico más amplio. De Vasari aprendemos que fueron las innovaciones técnicas de Leonardo, su capacidad de observación y la destreza de sus manos, las que le merecieron la admiración universal de rivales y *connoisseurs* e hicieron de él, con sólo diez pinturas a medio acabar, un maestro reconocido; un maestro admirado, más que por su producción total como artista, por los ejemplos clave que dio en técnica pictórica[35].

---

35 Según ha escrito un periodista en una revista cultural publicada mientras estaba en la imprenta este ensayo, "Se ha dicho que hasta la llegada de Leonardo el arte de Occidente posee una semejanza de parentesco con el arte del resto del mundo. Después de Leonardo, el arte occidental tomó un rumbo propio y único." La repulsión que provoca en el hombre reflexivo este típico pronunciamiento, desde nuestra cumbre de cómoda ilustración, de clichés epigramáticos para resumir el mundo en una pantalla tan minúscula como borrosa, no debe impedirle el reco-

Fig. 21. El *Lamento sobre Cristo* de Giotto (por cortesía del Gabinetto Fotográfico del Museo Civico di Padova)

Fig. 22. La *Pietà* de Ercole di Roberti (por cortesía del Walker Art Gallery, Liverpool)

Fig. 23. El Joven David de Andrea del Castagno (por cortesía del National Gallery of Art, Washington, D. C. [colección Widener])

Fig. 24. El *Dinero del Tributo* de Masaccio

Dejando para otros la tarea de imaginarse las innovaciones artísticas de Leonardo, regresamos al resumen que Vasari nos hace en su obra y vamos a fijarnos en la virtud que *no* le atribuyó. No dice una palabra acerca de fuerza (de expresión). Sin embargo, nos habla de Giotto, quien bien pudiera, tres siglos más tarde, resultarle arcaico a un Manierista, como exponente de "el más cálido amor", "la emoción del llanto", "ternura y devoción"; de Ercole di Roberti, nos dice que era "muy conmovedor", y capaz de plasmar "la pena más inconcebible"; habla de Andrea dal Castagno, aunque detestaba este "hombre brutal", y comenta cómo reproducía "el sufrimiento de la carne, la divinidad escondida en los cuerpos que les confiere un noble esplendor", y "el odio y la furia" en los rostros; de Masaccio cuenta que pintó una cabeza "dotada de tal vigor que tan sólo parece faltarle el poder hablar", y también que es capaz de mostrar "un espíritu invencible y divino"; y aún quedan muchos más ejemplos para demostrar que Vasari apreciaba la fuerza de expresión allá donde la encontraba.

A lo largo de toda la larga biografía que hizo Vasari de Leonardo le alaba como artista pero en ningún lado aparecen las palabras fuerza y vigor. Se refiere sobre todo a figuras dotadas de respiración y movimiento, mencionando esta característica una y otra vez. La gente acudía en gran número para ver el cartón de *la Virgen y Santa Ana,* admirando en él su "simplicidad y belleza", "la modestia y humildad de una Virgen feliz y contenta, ... mientras que Santa Ana sonríe con gran júbilo".

Es el movimiento, sin tomar en cuenta las fuerzas que lo producen, lo que Leonardo expresaba en sus cuadros. La disposición de las figuras es tradicional y simbólica, viéndose a la Virgen sentada sobre el regazo de su madre. La Virgen, a punto de resbalar, extiende sus brazos para recoger al Niño. Los brazos se han extendido en toda su longitud para levantar al Niño en el momento en que la Madre se desliza hacia el suelo. Aquí no se ve ningún gesto grandioso de alegría, pena, amenaza, o furia, sino tan sólo se recoge una actitud normal y humana. Aquí radica el virtuosismo que tanto interés excitó entre los artistas y *connossieurs* contemporáneos de Leonardo. En nuestra época, que desdeña la destreza, que proclama triunfalmente el derecho del artista a no representar nada sin utilizar ninguna técnica, tan sólo como un "experimento" sin interés para nadie, nuestros críticos de arte se ven obligados a buscar y encontrar algo diferente en Leonardo, más allá de su maestría para la representación "fotográfica". Cierto es que toda obra maestra lleva la impronta de la veracidad, que puede ser interpretada en épocas sucesivas a la luz de su propia experiencia y gustos. Pero los críticos victorianos rozaban con la arrogancia al creerse capaces de ver en las pinturas de Leonardo un aspecto que, según parece, pasó completamente desapercibido a tales gigantes del Arte como Giambologna, los Carraci, Gentileschi. Más bien diría yo que los críticos de estos últimos cien años se han engañado a sí mismos, queriendo hacernos ver espejismos tan ilusorios como serían la democracia, las teorías freudianas, el bombardeo estratégico, o la seguridad social trasladados al siglo XV. Si pudiéramos observar las pinturas de Leonardo de manera desapasionada y sentir el deber social de alabarlas en

---

nocimiento de que, en efecto, Leonardo ha tenido una *influencia* sobre los pintores occidentales de una importancia inferior a pocas, si es que alguna. Por ejemplo, ecos de las poses, los rostros, colores y las composiciones de Leonardo resuenan en centenares si no millares de espléndidos e imaginativos cuadros intelectuales procedentes del que actualmente a menudo se denomina "período manierista" (1520-1620), si bien es cierto que estos cuadros rara vez o nunca sondean las profundidades psíquicas que los críticos, al menos hasta hace muy poco, consideraban el contenido más importante de las propias producciones leonardinas.

términos superlativos, cabría aplicarlas un término procedente de la ciencia de la Mecánica: la imagen de Leonardo es cinemática, no dinámica. Nos muestra movimientos sin apenas haber captado las fuerzas que los han creado.

15. LEONARDO Y ALGUNOS ASPECTOS GENERALES DEL MOVIMIENTO DE FLUIDOS

Temiendo salir escaldado por practicar sin licencia la crítica artística, salgo ahora del cazo para meterme en la sartén que acoge a los aficionados de la historia de la ciencia. El estilo pictórico de Leonardo unido a lo que sabemos de sus conocimientos matemáticos nos ayuda a inferir sus propias limitaciones científicas. En efecto, cualquier trabajo científico original suyo

1. no utilizaría ningún instrumento matemático más allá de la geometría visual;
2. no exigiría el conocimiento de anteriores trabajos sobre el mismo tema;
3. no requeriría de experimentos o mediciones;
4. habría de consistir necesariamente de una observación de configuraciones o movimientos, sin tomar en cuenta fuerzas u otras causas.

Esto parece restringir su posible campo de trabajo; pero es un campo apropiado para un ser humano si bien que no para un "genio". Los estudios sobre el movimiento de fluidos, tal y como se encontraba su desarrollo en 1500, cumplían los cuatro requisitos anteriores. Y de hecho, los resultados obtenidos por Leonardo en este campo son reales, y hasta donde yo he podido averiguar, originales.

Aquí, también encontramos, sobre todo, preguntas, afirmaciones acerca de lo que debería ser investigado, o teoría confusa y absurda, como cuando compara el océano con el corazón, el "estanque de sangre" que "llena el cuerpo de la tierra con un número infinito de venas de agua"; también se lee "el agua, que es el humor vital de la máquina terrestre, se mueve gracias a su propio calor natural". Todo esto lo desechamos en favor de lo que Leonardo nos refiere acerca de sus observaciones.

Entre los apuntes y bosquejos de Leonardo encontramos lo que parece ser el primer enunciado de la ley de los vasos comunicantes:

"...las superficies de todos los líquidos en reposo, que se encuentren unidos entre sí por debajo, siempre tienen la misma altura" (Atl. 219*v.* a),

independientemente del tamaño y forma de los recipientes. Se percató también de cómo ascendían los fluidos por las paredes de los recipientes en rotación, y por los tubos capilares (Atl. 11*r.* b, 35*r.* a, MS G 44*v.*, 68*r.*).

Los estudios de Leonardo sobre máquinas voladoras han sido exagerados por sus admiradores[36]. Es obvio que en 1500 nadie sabía la suficiente mecánica de fluidos como para llegar a algo más que la simple recreación con tales artefactos; no se le puede reprochar, pues, el hecho de que se contentara él con imitar a los pájaros y a los peces. A Dédalo le había bastado con fijar sus alas con cera, pero Leonardo

---

36 La referencia standard es el estudio de R. Giacomelli, *Gli Scritti di Leonardo da Vinci sul Volo*, Roma, Bardi, 1936.

Fig. 25. El Cartón de Leonardo para *La Virgen y el Niño con Sta. Ana y Juan el Bautista*
(por cortesía del National Gallery, Londres)

Fig. 26. El cuadro *La Virgen y el Niño con Sta. Ana* de Leonardo (por cortesía del Musée du Louvre)

tuvo que diseñar un correaje y mecanismo para el aleteo. Sus incondicionales más intrépidos le agravian al experimentar de nuevo con las máquinas que él dibujó, ya que no todos sus diseños deben interpretarse como listos para fabricación. Si hoy en día un matemático proyectara algo tan patentemente absurdo como un helicóptero de impulsión humana (fig. 27), se encontraría con esas sonrisas desdeñosas que los pragmáticos suelen otorgar a intelectuales teorizantes. Ni el propio Leonardo en 1490 pudo haber pensado que tal artefacto llegara a funcionar. Desde luego que las figuras humanas fueron añadidas por algún idólatra moderno, uno de los que con su servilismo irracional son, de hecho, detractores de aquel que adoran. En el propio dibujo original reproducido debajo del modelo, el cabestrante ha de interpretarse tan sólo como una indicación de que el tornillo debe girar. Cuando en una obra científica del siglo XVII vemos un diagrama que nos muestra unas balas de cañón levantadas por manos etéreas que sólo se apoyan en elegantes bocamangas de encaje, ni sospechamos que los científicos de aquel entonces creyesen que una mano separada del cuerpo fuese capaz de levantar algo, ni nos dedicamos a formar sociedades esotéricas para experimentar con manos de cadáveres en la esperanza de que Huygens, o Varignon hubieran soñado un misterioso sistema de ganchos celestiales. Por lo menos, la máquina que nos presenta Leonardo no es un artefacto del todo disparatado. Lo que ejemplifica es el tornillo que ideó Arquímedes para elevar el agua, pero en este caso, al permanecer quieto el fluido y elevarse la máquina, no cierra la superficie del cilindro. La idea es sencilla pero está basada en un hecho que no resulta obvio, a saber: que *el aire y el agua son esencialmente similares respecto a su movimiento.* En los manuscritos de Leonardo leemos una y otra vez:

"...en todos los casos donde hay movimiento el agua tiene gran parecido con el aire." (MS A 61*r.*),

y también

"...el movimiento del agua en el seno del agua se parece mucho al aire en el seno del aire[37]",

y

"El viento se asemeja a un movimiento del agua." (Atl. 361*v.* a),

además de muchas afirmaciones del mismo tipo (vg., Atl. 373*r.* b, MS A 9*v.*, 60*r.*).

Tal conclusión sólo puede provenir de la observación. Aunque elemental, es un prerrequisito indispensable para una aerodinámica racional, y Leonardo fue el primero en enunciarlo de manera clara y tajante. No es una observación tan insignificante como pudiera pensar un profano de la ciencia: casi dos siglos más tarde, Newton, un gran experimentalista, no supo ver esta semejanza en el comportamiento de los dos fluidos, debido a lo cual comenzó el estudio de la aerodinámica sobre unas bases más bien irrelevantes. Se sigue notando su influencia en los típicos cartelitos que aparecen en los talleres alabando a la abeja por despreciar la demostración teórica de que no puede volar. Leonardo no inventó el tornillo aéreo

---

37 MacCurdy, en su traducción inglesa de los cuadernos, pág. 645, da este pasaje como procedente de Atl. 108*v.* a, donde de hecho no aparece. Yo lo transcribo arriba porque confío que debe de estar en alguna parte, y es la más clara de las afirmaciones de Leonardo en este sentido. De todos los trozos de Leonardo citados en este ensayo, éste es el único al que no he revisado la traducción.

Fig. 27. El proyecto de Leonardo de un tornillo aéreo (MS B 83*v.*), y un modelo moderno del mismo (de la colección del Fine Arts Department, International Business Machines Corporation)

ya que los juguetes voladores existían mucho antes de su nacimiento[38]. Más bien podemos suponer que esta aplicación se unió a otros datos a partir de los cuales infirió –pues me parece que, en efecto, fue el primero– por primera vez el concepto vago de *fluido* en el que se subsumen tanto el agua como el aire.

Como siempre que intentamos sacar algo en limpio en los apuntes de Leonardo, encontramos evidencias a favor y en contra. Bien sabía Leonardo que el aire y el agua difieren en un aspecto básico, pues afirma que el aire es infinitamente comprensible mientras que el agua es incomprensible. (Atl. 108*r.* a, Tr. 42*r.*). Pero en otro párrafo escribe,

"El aire no ofrece resistencia a menos que se haga más denso...
"El aire no se hace más denso salvo que sea puesto en movimiento." (Atl. 180*r.* a.)

Si la analogía entre el aire y el agua fuera exacta, el agua no ofrecería resistencia alguna, pero Leonardo no llega a comparar sus diversas afirmaciones acerca de la resistencia del aire y del agua para obtener esta conclusión lógica.

Hay bastantes párrafos en los que comenta sobre la resistencia de los fluidos en términos generales:

"Un objeto ofrece tanta resistencia al aire como el aire ofrece al objeto." (Atl. 381*v.* a.)
"Con respecto al movimiento del agua, resulta tan duro mover el remo contra el agua en reposo como mover el agua contra el remo en reposo." (Atl. 175*r.* c.)
"La operación de mover el agua contra el aire en reposo es igual a aquella del aire contra el agua en reposo." (Arund. 135*r.*)
"Todo cuerpo huye en la dirección opuesta del lugar del que fue desalojado por el objeto que le golpeó... El cuerpo golpeará al objeto tanto como el objeto golpeará al cuerpo." (Arund. 85*r.*)[39]

Aunque tales afirmaciones sean útiles incluso hoy en día para el cálculo de resistencias, están erizadas de restricciones. De hecho están implicadas dos ideas muy distintas: 1) en cualquier acción mecánica, la cantidad de movimiento permanece constante, de no intervenir fuerzas, y 2) un sistema de reacciones permanece invariable bajo una traslación a velocidad constante de su sistema de referencia. Como Leonardo en ningún lado explicita el sentido preciso de sus afirmaciones, no hay manera de entender lo que quiso él decir, por lo que no parece correcto interpretarlas en un sentido moderno. En la época de Leonardo todavía no se conocían las leyes necesarias para justificar tales principios ni tampoco fueron enunciadas por él; parece razonable suponer que se limitaba a extrapolar, con insuficiente fundamento, la antigua ley del equilibrio entre fuerzas estáticas.

---

38 Hay una cantidad considerable de literatura que trata el famoso bosquejo leonardino; se incluyen referencias al mismo en uno de los últimos artículos de la serie: L. Reti, "Helicopters and whirligigs", *Raccolta Vinciana* 20, 331-338 (1964). Reti apoya la tesis de C. G. Gibbs-Smith:

1. La idea no se originó con Leonardo dado que ya por el año 1440, si no antes, existían juguetes de perinola y de vez en cuando se representan en el arte del siglo quince. Reti ha encontrado un diagrama de uno en un manuscrito sobre ingeniería militar.
2. La gran contribución de Leonardo fue concebir un helicóptero que portase a bordo su propia fuente de energía y diseñado para soportar el peso humano.

Yo por mi parte no veo evidencia para la segunda pretensión, la cual, me parece, confunde "diseño" con "sueño".

39 No es segura la traducción de la última frase. Lo que escribió Leonardo es: "tanto e al corpo a percotere ne lo bietto quanto aesso obietto a percotere in detto corpo".

¿Cómo se puede determinar el fluir del agua de una manera precisa? Según Leonardo:

"...mediante las hojas de los árboles que son arrastradas en grandes cantidades desde la superficie hacia las profundidades del agua que fluye transparente." (MS F 44*r.*)

Pero no hay que esperar a que caigan las hojas:

"Aquí, cerca de la superficie, se halla la salida del agua, y cabe preguntarse qué parte de la superficie del agua se moverá con mayor o menor rapidez en las proximidades de esta salida. Para obtener una regla, yo colocaría algunas partículas de sustancia flotante, todas ellas iguales (de tamaño), como, por ejemplo, algunas semillas de hierbas, formando un círculo equidistante de la salida..., y fijándome en la primera que llegase al desagüe, cortaría el paso del agua y observaría el círculo." (Atl. 126*v.* a.)

Para determinar las corrientes que aparecen dentro del agua que hierve en una olla,

"...se pueden echar cuidadosamente unos pocos granos de mijo, ya que del movimiento de estos granos se puede conocer fácilmente el movimiento del agua que los transporta. Y gracias a tal experimento, se pueden estudiar muchos y muy bellos movimientos producidos al haber penetrado un elemento en el seno del otro." (MS F 34*v.*)

"Si se arroja serrín sobre la corriente de un arroyo se puede observar el lugar donde el agua que se revuelve sobre sí misma tras tropezar con la ribera, devuelve el serrín hacia el centro de la corriente; también se observan los remolinos del agua en los puntos donde confluyen o se separan distintas aguas, entre otras muchas cosas." (MS K 1*r.*)

Para ver el flujo de salida en un recipiente con paredes de vidrio,

"esparcir pequeñas semillas..., de tal modo que se distribuyan por el seno del agua... El movimiento de estas semillas indicará qué zona del agua se mueve con más velocidad hacia el orificio de salida y en qué lugar se inicia este movimiento." (Atl. 81*r.* a.)

Esta misma técnica propone utilizarla en el diseño más antiguo que se conoce de un aparato para el estudio experimental de la hidráulica (MS $I^{(2)}$ 115 [67]*r.*)[40].

Hubieron de pasar dos siglos antes de que estas técnicas volvieran a ser utilizadas, y aún continúan en uso en la actualidad. Uno de los dibujos de Leonardo sobre este tema aparece en la fig. 28. Otros han dibujado cascadas quizás tan bellas como ésta, pero muy pocos han logrado una tal exactitud, pues debió ser, al igual que sus dibujos anatómicos, fruto de muchas horas de observación. La cascada coopera con el artista manteniendo una pose estacionaria; éste arroja unos cuantos granos en un punto, y dibuja sus trayectorias; otros pocos en otro punto y así durante horas y horas hasta conseguir dibujar toda la cascada.

Hemos de detenernos aquí para subrayar las diferencias conceptuales que presenta este dibujo con cualquier otro anterior a él, incluso para los que le preceden en tan sólo cincuenta años. Al decir que es más "exacto" que lo que pudiera haber sido cualquier dibujo de la Baja Edad Media sobre el mismo objeto, reconoce-

---

40 "Experimento de saltos sobre un canal uniforme. Hágase un costado del canal de vidrio, y el resto de madera, y mézclese con el agua que choca contra él harina o una pasta de belcho (pasta di palperi), de modo que mediante sus movimientos se vea mejor el curso del agua. Y una vez que se tenga experiencia de estos saltos, llénese el fondo con arena mezclada con gravilla fina, a continuación allánese el fondo, y hágase que el agua salte encima de él, y véase dónde lo levanta o deposita. A continuación, constrúyase la orilla del costado de madera con arena fina, y véanse sus efectos a través del vidrio, y hágase esto en agua corriente." No está claro lo que se quería mostrar con este experimento.

Fig. 28. Croquis de Leonardo de una cascada (Windsor Drawings 12660*v.*, reproducido con el amable permiso de Su Majestad Británica)

mos aquí el convenio óptico que parece haber sido adoptado por la mayoría de los dibujantes renacentistas, de entre los cuales Leonardo fue claramente el más influyente. Tal convenio es necesario si se desea reconstruir el objeto y no contentarse con una simple impresión visual o una percepción del papel que desempeña en un contexto artístico. Los diseños de diversas máquinas que dibujó en el siglo XIII el arquitecto Villard d'Honnecourt no tenían ninguna pretensión "artística" y sin embargo, hoy en día resultan tan imprecisos que es imposible comprender cómo pensaba acoplar las distintas piezas. Un buen dibujo renacentista de una máquina aunque apareciera tan sólo como detalle secundario en un cuadro, resulta tan fiel a la realidad que no deja lugar a dudas acerca de las tuercas y engranajes que en él intervienen. Sin este convenio[41] óptico tan rígido, no cabría la posibilidad de una ilustración científica, lo que nos da un ejemplo de la íntima relación de las artes gráficas con el despertar de la ciencia.

16. LEONARDO HABLANDO SOBRE LAS OLAS Y LOS REMOLINOS

Volviendo al estudio de las corrientes de agua, encontramos que Leonardo fue el primero en enunciar el principio de la superposición: Una pequeña perturbación en la superficie del agua prosigue su camino sin verse afectada por otras pequeñas perturbaciones.

"A pesar de que las voces que penetran este aire se separan unas de otras siguiendo movimientos circulares a partir de sus causas, estos círculos nacidos en lugares diferentes se cruzan sin impedimento alguno, penetrando uno dentro del otro, pero manteniendo siempre sus causas como centros respectivos.

"Voy a utilizar el (hecho) de presentar, siempre que hay movimiento, un gran parecido el agua con el aire, para ejemplificar la anterior proposición. Yo digo, que si se arrojan simultáneamente dos pequeñas piedras a una superficie de agua en reposo, y separadas por una cierta distancia entre sí, se observará la formación de dos números distintos de círculos en torno de las dos percusiones; estos círculos se van aumentando en número llegando a encontrarse, interseccionándose los círculos entre sí y manteniendo siempre como centros los lugares donde cayeron las piedras. Y la razón es que, aunque parezca existir cierto indicio de movimiento, el agua no abandona el lugar que ocupa por cerrarse de inmediato los huecos en ella producidos por las piedras. Este movimiento producido por el brusco abrir y cerrar del agua ocasiona en ella una cierta agitación que podría llamarse mejor temblor que movimiento. Y para aclarar esto que digo, basta fijarse en aquellas briznas que por su ligereza flotan sobre el agua: a pesar de la ola que pasa bajo ella debida a la llegada de los círculos, no abandonan sus posiciones primitivas. Ya que esta reacción del agua es más temblor que movimiento (los círculos) no podrán destruirse mutuamente al encontrarse. Como todas las partes del agua son del mismo tipo, es necesario que tales partes transmitan este temblor de unas a otras sin cambiar de lugar, pues el agua, permaneciendo siempre en su posición, fácilmente lleva el tal temblor de unas partes vecinas a otras, disminuyendo progresivamente la intensidad." (MS A 61*r.* (fig. 29), véase también MS H 31*v.*, Forster III 76*r.*)

---

41 Los escritores sobre el Arte parecen suponer, un tanto ingenuamente, que el convenio óptico del Renacimiento es el *único* que pueda servir para la ilustración científica. Evidentemente esto no es cierto, como puede verse del conjunto de proyecciones euclídeas que hoy día forman el bloque si no la totalidad de los dibujos de diseño para una pieza de equipo. En muchos casos basta dar dos o tres, acaso unas pocas más, proyecciones ortográficas, las cuales, de acuerdo con el *Oxford Dictionary,* se mencionaron por vez primera en las *Philosophical Transactions* de 1668, y que se hicieron universales en la ingeniería decimonónica debido a la influencia del empleo cada vez más amplio de coordenadas cartesianas rectangulares en la geometría matemática desde mediados del siglo dieciocho en adelante.

Fig. 29. MS A 61*r.*, mostrando los comentarios leonardinos sobre la superposición de ondas superficiales (por cortesía del Institut de France)

"El ímpetu es mucho más rápido que el agua, pero muy a menudo huye la ola del lugar donde fue creada, sin que se mueva el agua de su sitio, de parecida manera a como ocurre en mayo con las olas que el viento crea sobre los campos de trigo; vemos correr a las olas por los campos sin que se muevan los tallos de su sitio." (MS F 87*v.*, véase también Leic. 14*v.*)

Así, Leonardo descubrió la verdadera naturaleza de las olas a través de la observación: es movimiento y no materia lo que transportan. También parece que se percató de que las olas se originan en movimientos verticales de subida y bajada del agua, pues describe:

"El valle entre dos olas se encuentra por debajo del nivel medio del agua como se ve por el agua que llega para rellenar los huecos ocasionados por el agua que baja." (MS E 71*v.*),

y

"En la misma medida en que se elevan las olas del mar por encima de la superficie normal del agua, así descienden los fondos de los valles que se encuentran entre las olas." (MS F 25*v.*)

Multitud de párrafos de sus libros de apuntes describen la reflexión de las olas en los márgenes de los canales, la distorsión de su forma debida a la corriente, y la formación de olas complejas por superposición de olas más simples.

Las minuciosas y variadas observaciones que efectuó Leonardo sobre la distribución de corrientes en los ríos y los canales fueron la causa por la que se interesara por los remolinos y parece haber sido el primero en describirlos ("l'onde colunnale", "l'onde semicolunnale", "retrosi").

Al distinguir entre los movimientos de los pequeños y grandes torbellinos, Leonardo dio la primera descripción que se conoce de turbulencia:

"De las cosas que se lleva el agua, girarán más rápidamente aquellas de tamaño menor. Esto ocurre porque los remolinos grandes rara vez aparecen en los cursos de los ríos, y en cambio, los (remolinos) pequeños son casi innumerables, y los objetos grandes giran tan sólo en los grandes remolinos y no en los pequeños, y los cuerpos pequeños dan vueltas tanto en los pequeños como en los grandes." (MS F 3*r.*)

También afirmó:

"El agua del fondo origina torbellinos de movimiento contrario a aquellos de arriba." (MS A 61*r.*)[42]

Aunque la razón que da es puramente teórica e incorrecta, el hecho experimental sin duda fue observado y puede que sea el primer ejemplo registrado de remolinos secundarios contenidos en uno mayor cuyo plano es perpendicular a ellos. Leonardo también observó y dibujó los remolinos formados en un rincón:

"Si el canal experimenta un ensanchamiento brusco a cada lado, genera remolinos en ambos lados..." [MS F 91*v.* (fig. 30)],

y también notó el daño que causan tales remolinos al erosionar los márgenes. Incluso dibujó la estela de remolinos que se forman tras un obstáculo[43] (fig. 31). Estos

---

[42] Arconati, en el capítulo 53 del Libro IV de la obra citada en la siguiente nota de pie de página, corrigió esto, cambiándolo por "remolinos que giran en movimiento contrario a aquel de arriba", lo que puede suponerse da el sentido pretendido por Leonardo.

[43] Conviene acotar esta afirmación. Aparecen varios dibujos en el Libro IV, Capítulos 29-34 de *Del Moto e Misura dell'Acqua*, editado por E. Carusi & A. Favaro, Boloña [1925], procedente del manuscrito compilado en 1643 por F. Luigi María Arconati basándose en ma-

Fig. 30. MS F 91*v.*, conteniendo el apunte de Leonardo de un vórtice generado por el repentino ensanchamiento de un canal (por cortesía del Institut de France)

Fig. 31. MS F 65*v.*, conteniendo el dibujo que hizo Leonardo de la estela de remolinos detrás de un obstáculo (por cortesía del Institut de France)

remolinos no llamaron mucho la atención hasta que fueron objeto de intenso estudio durante nuestro siglo.

Otra observación suya fue la de que el agua discurre más lentamente cerca de las orillas y el fondo:

> "En aguas de igual profundidad, anchura, e inclinación, la más rápida es la más cercana a la superficie." (Atl. 124*r.* a.)
>
> "Por el centro de canales rectos el agua discurre más rápidamente que por los costados." (MS $H^{(2)}$ 36*v.*, véase también MS $H^{(2)}$ 45*r.*, $I^{(2)}$ 58*r.*, 105 [57]*v.*, Atl. 175*r.* c.)

Comentó también la fricción de cuerpos más o menos densos, quizás fluidos, con el agua (Arund. 136*r.*). Fue el primero en plantear el problema de hallar la sección de área dada que diera la mayor descarga, dando como solución el medio círculo (MS K $^{(3)}$ 25*r.*). Al fijarse en el rozamiento de la pared interior de un tubo con el agua que por él circula, sugirió que se podía disminuir aumentando todo lo posible la sección interior del tubo. (MS E 12*v.*). Estudió en muchas ocasiones el flujo a través de orificios con distintas geometrías (vg. MS F 9*v.*). Por último, también parece haber sido el primero en apreciar que el gasto, para un orificio dado, es proporcional a la velocidad de flujo (MS F 16*r.*). Intentó el estudio de las salidas en chorro y el efecto que producía el aumentar la inclinación de un canal. A nadie puede sorprender que los resultados que él obtuvo para estos problemas, tan adelantados a su tiempo respecto a la teoría y tan difíciles de estudiar mediante la simple observación, sean incorrectas. (Vg. MS $I^{(2)}$ 25*r.*, 85*v.*, MS C 5*v.*, Atl. 251*v.* d, MS B 4*v.*).

Estos ejemplos demuestran que Leonardo observaba los problemas mecánicos de la misma manera que Aristóteles había observado y descrito el crecimiento de un embrión de pollo y el apareamiento de los tiburones. Tal agudeza en la observación denota, sin duda, un talento especial, pero no tiene de ciencia más que lo que puedan tener las actividades de un bibliógrafo o crítico de textos. Será obvio que aquí utilizo la palabra "ciencia" no como sinónimo de conocimiento o práctica, sino en el sentido preciso con que se ha utilizado a partir del siglo XVIII y que aparece definido como sigue en el Oxford Dictionary (1910)[44]: "una rama de estudios que se

---

nuscritos de Leonardo, Muchos pasajes de este libro son citas más o menos exactas de entradas en los cuadernos todavía existentes de Leonardo. Para otros, en cambio, incluyendo aquellos que tratan de las estelas de vórtices, no he encontrado ningún original leonardino correspondiente. Si bien es verdad que incluyó Arconati ciertas mejoras y aditamentos de cosecha propia, no hay razón para sospechar de las descripciones de estelas de vórtices, dado que son muy similares a lo que escribió Leonardo acerca de vórtices en esquinas, y además, los propios dibujos leonardinos demuestran el interés que le habían suscitado las estelas de vórtices.

Debo mencionar aquí que los pasajes tomados de los apuntes del propio Leonardo que adjuntan Carusi & Favaro como notas de pie de página en su edición no son exhaustivos y no siempre son los mejores o los más aproximados al texto de Arconati.

[44] El *Dictionary* menciona de hecho un uso posterior, empleado a partir de 1867, "a veces con la exclusión implícita de la matemática pura"; es a este sentido, más o menos, que se refiere la frase inaugural de esta conferencia.

Existe un sentido todavía más reciente, actualmente en el proceso de derribar todos los anteriores; podría definirse este nuevo sentido como sigue: "Una rama del saber que trata de costumbres y modos de conducta, métodos de fabricación o procesado, y creencias inferidas de experiencia común o pruebas repetidas, por lo general con la ayuda de la estadística, y cuyos cultivadores han formado grupos profesionales en busca del reconocimiento intelectual anteriormente acordado a expertos en las ciencias matemáticas, físicas y biológicas." Un muestreo breve y aleatorio de los catálogos de las Escuelas para Postgraduados dio como fruto, además de las ubicuas "Ciencias Sociales", "Ciencias Políticas" y "Ciencias de Computadores" ("Informática"), ciertos ejemplos especiales: "Ciencias Cárnicas y de los Animales" (Universidad de

ocupa bien con un conjunto estructurado de verdades demostradas, o bien con hechos observados, clasificados de manera sistemática, y relacionados entre sí mediante leyes generales; dicha rama incluye métodos fiables para descubrir nuevas verdades dentro de su propio campo". La ciencia, por lo menos la verdadera ciencia, no monopoliza ni la inteligencia, ni la curiosidad, ni el razonamiento, ni la paciencia, ni el esfuerzo, pues igualmente se pueden encontrar estas cualidades en alguien dedicado a la crianza de animales, en un agente de bolsa, o en un pintor. Al comienzo de esta conferencia, ya dije que el rasgo característico que presentan las ciencias naturales en Occidente es su fundamento *matemático,* y que la labor del historiador de la ciencia consiste en buscar el origen y rastrear el crecimiento de esta manera de interpretar el mundo en términos matemáticos. Evidentemente, la palabra "matemáticas" no ha de entenderse aquí en el sentido de matemáticas "puras", divorciadas de la Naturaleza, ni se debe esperar de Leonardo ni de cualquier otro que fuera capaz de integrar las ecuaciones diferenciales de la dinámica antes del descubrimiento de éstas. Por "matemáticas" entiendo la asignación de magnitudes matemáticas, generalmente números, figuras geométricas, u operaciones delimitadas por reglas formales, a fenómenos naturales y el posterior uso del más estricto razonamiento matemático para reemplazar las cualidades, tendencias, medidas experimentales, y reglas empíricas típicas de las ciencias de otras culturas, así como las actividades artesanas que aparecen en toda cultura.

17. Los principios de Leonardo acerca de la continuidad y la circulacion

Aparecen en los escritos de Leonardo sobre los flujos de agua dos[45] asombrosas afirmaciones acerca de la Naturaleza que no sólo son ciertas sino que además encierran un contenido matemático, a saber, los primeros enunciados restringidos de *el principio de continuidad,* y *el principio de circulación constante.* Ambos enunciados se ven oscurecidos por la vaguedad y excesiva complicación que siempre acompañan al nacimiento de un concepto nuevo.

Según el principio de continuidad, en su forma actual, la velocidad del flujo en régimen estacionario es inversamente proporcional a la sección recta del canal (fig. 32). Según parece, Leonardo enfocó este problema a través de ciertos casos particulares, restringiéndose[46] de una manera innecesaria:

"El agua que corre entre márgenes separados por una anchura constante, aquella que posea una menor profundidad tendrá un discurrir más rápido. El agua que corre sobre un fondo de igual inclinación será tanto menos profunda cuanto mayor sea su anchura." (MS H$^{(2)}$ 54 [6] *v.*),

"Todo movimiento de agua, con igual anchura y superficie, será tanto más rápido en un

---

Wisconsin), "Ciencias Administrativas" (Yale), "Ciencias Retóricas" (Purdue), "Ciencias Bibliotecarias" (Universidad de Indiana), "Ciencia de Bosques" (Harvard), "Ciencias de Productos Lácteos" (Universidad de Illinois), "Ciencias Mortuorias" (Universidad de Minnesota).

[45] Se le ha atribuido un tercer "principio de Pascal" de la igualdad de las presiones del aire en todos los puntos de la pared del recipiente que llena, pero no lo encuentro en el pasaje citado, a saber, Atl. 351*r.* b.

[46] Véase F. Arredi, "Gli studi di Leonardo da Vinci sul moto delle acque", *Annali dei Lavori Pubblici* 1939, núm. 4, 357-363.

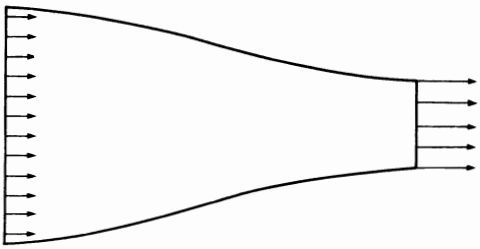


Fig. 32. Principio de continuidad para flujo estacionario. En una cañería o un canal, el agua fluye más deprisa a medida que disminuye la sección: el producto velocidad x área es el mismo en toda sección

lugar que en otro cuanto (el agua) sea menos profunda en el primer lugar que en el segundo." (MS A 57*v.*),

y

"[para] aguas que discurren sobre los fondos de ríos con inclinación uniforme, las proporciones de las velocidades de sus movimientos son las de sus profundidades." (Atl. 81*v.* a.),

"El movimiento universal del agua, en teniendo igual fondo, tendrá tanto mayor paso en un lugar que en otro, según que su océano o río tenga una menor distancia entre sus orillas." (Atl. 361*v.* a.),

"En la misma medida en que se aumente la anchura del río, en igual cantidad disminuirá la velocidad de su curso." (Atl. 80*r.* b.),

"En igual cantidad en que aumente uno la anchura o profundidad del río, quedará disminuida la cualidad de su movimiento." (Atl. 80*r.* b, véase Leic. 24*r.*).

Por último:

"En ríos de cualesquiera anchura y profundidad, ha de suceder necesariamente que en cada tramo de su longitud pase, para cualquier tiempo (dado) una igual cantidad de agua. La necesidad exige esto, ya que en aquel tramo por el que haya pasado menos agua que por los otros iría secándose el agua, puesto que el tramo inmediatamente siguiente no podría proporcionar una mayor cantidad de agua al que le sucede que la recibida de su predecesor; y así, los tramos por los que haya pasado más agua, al no poder eliminarla más adelante, iría acumulándose con el tiempo hasta llegar a tocar el cielo." (Leic. 6*v.*).

Es más, Leonardo se apercibió de que este principio equivalía a un principio de gasto constante:

"Si al río ni se le añade ni se le quita agua, ésta pasará en iguales cantidades por todas partes de su anchura [¿longitud?], con distintas velocidades y lentitudes a través de las diversas estrecheces y anchuras de su recorrido." (Atl. 287*r.* b.)

El principio de circulación constante aplicado a un torbellino afirma que el producto de la velocidad (lineal) por la longitud del radio toma el mismo valor en cada círculo de flujo (fig. 33). El enunciado más antiguo de este principio aparece en los escritos de Leonardo de la forma siguiente:

"En todo líquido, el movimiento en espiral, o mejor aún, el movimiento rotatorio es tanto más rápido cuanto más se acerca al centro de su revolución. Esto que aquí mostramos es algo digno de admiración; pues el movimiento de una rueda circular es tanto más lento cuanto más se acerca al centro del objeto que gira. Pero en este caso (el del agua), tenemos el mismo

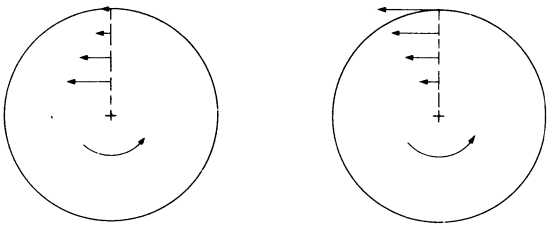


Fig. 33. Vórtice y rueda. Rotación de un vórtice: la velocidad en la periferia es la mínima, la velocidad en el centro es muy grande. (Ley: velocidad x distancia = constante.) Rotación de una rueda: la velocidad en la periferia es la máxima, la velocidad en el eje es cero. (Ley: velocidad/distancia= constante.)

movimiento en velocidad y longitud para cada revolución completa del agua, tanto en la circunferencia del mayor de los círculos como en la del menor...; y así el agua se mueve por igual en todo su movimiento circular..." (Atl. 296*v*. b.)

Para justificar este hecho asombroso, Leonardo aduce una razón puramente teórica y como de costumbre, resulta ser incorrecta.

Raro es el experimentador que descubre dos leyes de tal calibre como éstas, dos proposiciones fundamentales de la mecánica de fluidos. Ha bastado un único descubrimiento de mucha menor categoría para elevar a la fama a muchos hombres que con anterioridad al mismo habían sido perfectos desconocidos. De aquí que no hagan falta dos descubrimientos fundamentales además de tener fama de gran pintor para obtener un puesto de honor en la historia de la mecánica occidental. Si Leonardo llegó a descubrir mediante la observación estos dos principios, es sin duda uno de los fundadores de la mecánica occidental[47].

Pero, ¿es que en realidad descubrió estos dos principios? Desgraciadamente, no hay motivo para pensar así, y en cambio existen muchas para dudar de ello. Recordemos su método tal y como lo hemos inferido de los ejemplos estudiados; recordemos que las *únicas* relaciones funcionales que llegó a proponer fueron lineales; que él *siempre* proponía relaciones de este tipo a menos que no resultaran obviamente falsas, e incluso, a veces, cuando se veían claramente falsas. Soy de la opinión que una afirmación de Leonardo de la forma: "A es proporcional a B", debe interpretarse como su manera de expresar que "A aumenta si B aumenta."[48]

Un científico, aun en épocas pasadas, no puede considerar como prácticamente equivalentes estas dos afirmaciones. En los casos particulares de la ley de la continuidad y la ley de los torbellinos, sucede que Leonardo, tuvo suerte porque en verdad son válidas aquí las proporciones simples. Si tan sólo hubiese confeccionado una sola tabla de datos, una única lista de los valores que toma el gasto para tubos

---

47 En un ensayo un tanto entusiasta, C. Zammattio atribuye a Leonardo la primera observación de la *vena contracta,* pero sin dar ninguna referencia y no he podido encontrar nada que apoye su pretensión. Véanse págs. 479-480 de "Hydraulic and nautical engineering", páginas 467-482 de *Leonardo da Vinci,* N. Y. Reynal & Co., s. f. [1963], escrito alrededor de 1938.

48 "Tanto..., quanto..." es una expresión empleada en el habla común tanto como en la matemática, y a veces lo utiliza Leonardo al descubrir una configuración natural donde toda precisión sería ilusoria. Vg., Atl. 185*r*. b: "Tanta son maiorj le tortuosita di fiumi quanto esse son piu vicini al lentroito del mjnor fiume nelfiume maggiore."

de distintas secciones, podríamos creer en la originalidad de sus logros científicos. Pero, que se sepa, jamás recopiló ningún dato experimental acerca de las corrientes de agua. Continuamente nos dice lo que hay que medir, pero jamás realiza él ninguna medida[49].

Así leemos:

"Encuentro que un peso situado en un tablón de madera que se apoya en dos pilastras, es causa de que el centro de dicho tablón descienda un *braccio;* el tablón tiene cuatro *bracci* de longitud, y el peso dista dos *bracci* de una pilastra. Si se coloca el peso a un solo *braccio* de distancia, ¿cuánto descenderá el tablón con el peso así situado?" (MS A 48*r.*)

Esto es uno de los primeros enunciados sobre el problema de la *elástica,* pero es sólo una pregunta y no una respuesta. He aquí otra pregunta que nos revela aún más acerca de su método:

"Recordatoria para llevar a cabo una prueba. Hacer una prueba. Si un trozo delgado de madera apoyado por sus extremos soporta diez libras, ¿cuánto más soportará una viga de la misma proporción? Y procura ayudarte mediante la regla de tres, pues una prueba sirve como buena regla." (MS A 33*r.*)

18. La fama de Leonardo

Hemos perdido la versión de conjunto en favor de los detalles. Después de todo lo que se ha barbotado durante cerca de cien años sobre Leonardo, nadie parece haber comentado lo que es evidente. Primero está el enorme *volumen* que ocupa todo lo que escribió Leonardo, sea científico o no, correcto o incorrecto, acerca de la mecánica. Nadie anterior a él había escrito *tanto* sobre mecánica y después de él, muy pocos le han conseguido igualar. Si hubiese estado empleado quinientos años más tarde en una universidad americana, como simple ayudante, y hubiese publicado tanto, rápidamente se habría situado entre los maestros más distinguidos. En segundo lugar, aunque no ofrece respuestas, plantea *pregunta tras pregunta* en términos de cantidad y no cualidad. Casi siempre aparece "¿cuántos *bracci?*", "¿cuánto más rápido?", "¿cuántas libras?", y no "más largo o más corto", "más rápido o más lento", o "más ligero o más pesado". También hay que destacar la capacidad de Leonardo para intuir la raíz de los problemas. Fue él el primero en considerar los problemas del movimiento sobre un plano inclinado y de la rotura de una viga, que serían, un siglo más tarde, los dos problemas centrales en "Dos ciencias nuevas" de Galileo. Todos nos acordamos de colegas nuestros, célebres por su profunda intuición y brillantes conjeturas, sin que se nos ocurra acusar a estos inoportunos personajes de no ser científicos, o de ser inútiles. El plantear la pregunta apropiada es a veces mucho más importante que responder correctamente a una pregunta mal planteada. Los textos standard de la historia de la ciencia adulan a Bacon por haber recomendado un método de investigación científica plenamente aceptado hoy en día, a pesar de no haber sido él mismo capaz de descubrir nada de importancia, ni siquiera con la ayuda de su método. Siguiendo este criterio, se le podría llamar a Leonardo el originador de la interrogación científica.

Resumamos a continuación los éxitos y fracasos de Leonardo en el terreno de la mecánica. Su realización más importante, la recopilación de sus observaciones

---

[49] Vg., MS A 47*r.*

sobre el movimiento de fluidos, quedó en forma de apuntes desordenados e incompletos, que jamás fueron publicados, permaneciendo en la oscuridad durante varios siglos. ¿Qué frase brillante habremos de inventar para plasmar una imagen de Leonardo apta para el profano? Prefiero, por mi parte, dejar que los hechos hablen por sí mismos, otorgándole únicamente la etiqueta de "genio", que tanto satisface a los pensadores victorianos, a los pedagogos modernos, y a las amas de casa.

En los escritos, en la pintura, y en la misma vida de Leonardo aparecen misterios y contradicciones, uno de los cuales se suele pasar por alto. Su fama como artista se fundamenta no sólo en las pocas obras maestras que dejó, sino también en la notable influencia que ejerció sobre muchos artistas contemporáneos suyos y sobre todo el desarrollo posterior del arte. Pero, ¿cómo explicar que él, "...maestro de lo incompleto y de lo inacabado", de quien Vasari escribió que "no poseía nada y trabajaba poco", y "que hubiera sacado gran provecho de haber estudiado, de no ser tan caprichoso y voluble, pues comenzaba a aprender muchas cosas para dejarlas a un lado más tarde", pudiera a pesar de todo, llegar a tener en su tiempo tal fama de gran "filósofo"? La explicación es sencilla, basta recordar el método renacentista: la auto-propaganda. Veamos el siguiente fragmento de una carta suya en la que se recomienda a sí mismo para la concesión de un cargo:

"1) Sé construir puentes extremadamente ligeros y resistentes; ...otros, seguros e indestructibles por el fuego y el combate, fáciles de transportar y emplazar. También sé de métodos para quemar y destruir los del enemigo. 2) También sé cómo sacar el agua de los fosos cuando un lugar se encuentra sitiado... 4) Además conozco tipos de morteros fáciles de transportar... 7) Aún más. En caso de necesidad construiré grandes cañones..."

Y sigue en este estilo, relatando todas las cosas que es capaz de hacer. Tenemos testimonios de lo que vio, de lo que exhibió, y de lo que dijo. Siempre estaba hablando de lo que podía y sería capaz de hacer. Vasari habla solamente de modelos y diseños pero no de realizaciones palpables. Además, "hablando podía expresar sus ideas con tal claridad, que desconcertaba a los adversarios más resueltos", y en cierta ocasión, intentando persuadir a los dignatarios florentinos para que aceptaran un plan irrealizable, "arguyó con tanta elocuencia que no se dieron cuenta hasta después de su marcha de la imposibilidad de tal proyecto". Así, "su fama y renombre tanto se extendieron que no sólo llegó a ser muy apreciado en su época sino que además su fama se ha agigantado desde su muerte".

Fue un verdadero hijo del Renacimiento por su habilidad dialéctica y sentido de la propaganda. Al igual que los humanistas, fue capaz de alcanzar una fama imperecedera sobre cimientos más bien poco firmes pero haciendo gala de una gran habilidad. Según Cellini, el rey Francisco I dijo que "no creía hubiera habido otro hombre en el mundo de tan grandes conocimientos como Leonardo, y no sólo como escultor, pintor, y arquitecto, pues además era un profundo filósofo". Al igual que ocurre en nuestros días, en aquellos tiempos el estar a bien con príncipes y políticos no era digno de un verdadero filósofo, científico, o artista.

Según hemos visto, sus cuadernos de notas, contienen los primeros intentos de resolución de algunos de los problemas fundamentales de la física occidental; sin embargo, el propio Leonardo no concede a los párrafos en los que se ocupa de tales problemas más importancia que a muchos otros que carecen totalmente de interés. Somos *nosotros* los que apreciamos la magnitud de algunas de las cuestiones que trató; él parece que no se percató. Para él, tanto el movimiento sobre un plano inclinado y la circulación de un torbellino, como la puntería de una bombarda y el aparejar una vela no son más que detalles dentro de una larga y monótona lista

de dichos, preguntas, y recetas. En un ensayo histórico como el presente, la búsqueda de lo positivo obliga a ignorar cualquier evaluación global. Esto es absolutamente correcto, pues para un científico, la historia de la ciencia debe trazar el origen y desarrollo de lo que se entiende por *ciencia* en la actualidad, sin intentar abarcar todos los aspectos de la eterna preocupación que el hombre siente ante la Naturaleza. Si tuviera que hacer caso omiso a este precepto, yo describiría *a grosso modo* la totalidad de los escritos de Leonardo como notas fragmentarias para una enciclopedia al estilo de las de Plinio e Isidoro de Sevilla. Como ellos, Leonardo no siempre llegó a dominar lo que recopiló de entre la obra de sus predecesores; también coincide con ellos en que sus recopilaciones resultan ser, en muchos casos, nuestras únicas fuentes para saber lo que descubrieron estos predecesores, cuyos nombres y obras se han perdido en las sombras de la Historia; difiere de ellos en que nunca les dio a sus cuadernos una forma definitiva.

Se ha tachado de superficiel el relato que hace Vasari de la vida de Leonardo. Tal vez esto sea porque los críticos piensen que un hombre tan brillante como, sin duda, lo fue, forzosamente, *debió* llevar a cabo grandes empresas. Pero acaso es que Vasari no contó más que la realidad: las notas, los planes, los designios, los proyectos abandonados, y sus trucos. Vasari escribe, "A pesar de que habló de sus obras en términos exagerados, su nombre y su fama jamás pasarán al olvido." A través de su larga vida, dio continuas muestras de lo que podía y era capaz de hacer. De aquel Leonardo dotado como pocos y que llegó a vivir 70 años para legarnos tan sólo diez cuadros, la mitad inacabados, y un montón desordenado de papeles, nos cuenta Vasari que en su lecho de muerte "vio cuánto había ofendido al Señor y al Hombre al no haber trabajado su arte como debió".

Las abreviaturas empleadas al citar los manuscritos, cada uno de los cuales está disponible en al menos una publicación facsímile, son las siguientes:

Atl.=Codice Atlantico, Biblioteca Ambrosiana, Milán.
Tr. = Codice Trivulziano, idem.
MS A. B. ..., I, K, L, M = Manuscrits A, ..., Bibliothèque de l'Institut de France.
Arund. =Arundel MSS, No. 263, British Museum.
Forster = Forster Bequest MSS, Victoria and Albert Museum.
Leic. = MS. Leicester, Pierpont Morgan Library.
Q. Anat. =Quaderni d'Anatomia, Royal Library, Windsor.
Windsor Drawings = Dibujos en la Royal Library, Windsor.

RECONOCIMIENTO

En el año 1954, llegó a la Universidad de Indiana una exhibición circulante de modelos incorporando los diseños de Leonardo da Vinci. Los preparativos para su presentación ante el público se dejaron en manos del Segundo Oficial de Publicidad, el cual invitó a un profesor de historia del arte para que diera una conferencia pública explicando las ideas de Leonardo acerca de la mecánica. Yo era lo bastante ingenuo en aquel tiempo como para sorprenderme y lo bastante escandalizado como para voluntariamente ofrecer a enterarme de lo que pudiese sobre este tema durante las dos semanas siguientes y presentar lo que hubiese aprendido. Mi conferencia se leyó el 14 de Octubre de 1954.

Desde aquel momento me encontré víctima de los recurrientes accesos de exasperación fascinada que, sospecho, son los únicos vínculos de unión entre aquellos que estudian los manuscritos de Leonardo. Yo no podía entregar para publicación nada de lo cual no estuviera seguro de su validez; y no estaba seguro de nada en lo que respecta a Leonardo. A medida que se seguían las sucesivas revisiones, las iba entregando en posteriores conferencias para la Washington Philosophical Society (1958), la Universidad de Minnesota (1962), las Universidades de California en Berkeley y Los Angeles (1963), como Profesor Walker-Ames en la Universidad de Washing-

ton (1964), en la Universidad de Johns Hopkins (1965), como Profesor del Gibson Memorial en la Universidad de Glasgow (1965), y como Profesor del Centenario en la Universidad de Kentucky (1965). El texto que precede se basa en la última de estas conferencias pero ha sido revisado por completo. Una versión muy abreviada ha aparecido en la *Johns Hopkins Magazine,* Primavera de 1967.

Atrasé la publicación hasta que tuve la razonable confianza de haber leído, ponderado, y vuelto a leer todos los pasajes en los cuadernos leonardinos que fueran relevantes a los principios fundamentales de la mecánica en el sentido más amplio, incluyendo los movimientos de cuerpos sólidos y fluidos. Me dí cuenta entonces que si esperase hasta estar seguro de entenderlos todos, no publicaría nunca. Con reparos, pues, dejo a un lado mi investigación y lo ofrezco a la crítica de otros –unos pocos días después de escribir esta frase, se anunció el redescubrimiento de centenares de páginas nuevas de Leonardo.

Mientras va este ensayo a la imprenta, quisiera sumarme a la gratitud que ha de sentir todo estudioso de Leonardo hacia los tres hombres que hicieron más o menos disponibles los *textos,* en una forma tan organizada que permite una utilización sin mayor pérdida de tiempo que lo que merezca el asunto.

Frate Luigi Maria Arconati (c. 1600-después de 1643), el cual compiló el ordenado tratado *Del Moto e Misura dell'Acqua,* que consiste casi enteramente de citas o paráfrasis de los apuntes de Leonardo sobre los movimientos de los fluidos.

Pierre Duhem (1861 - 1916), el cual fue el primero en publicar o describir lo suficiente de los apuntes leonardinos sobre estática y dinámica generales como para dar una visión sucinta de su actividad y sus antecedentes.

Arturo Uccelli (1889), el cual, guiado en parte por los ensayos de Roberto Marcolongo, puso en manos de los estudiosos una colección organizada y casi completa de los apuntes y dibujos de Leonardo sobre mecánica general (excluyendo mecanismos y cuerpos deformables).

Quisiera también expresar mi gratitud por la inolvidada orientación de mi amigo y maestro, Paul Felix Neményi (1895 - 1952), quien fue, al parecer, el primero en arrojar la luz combinada del raciocinio y el conocimiento sobre los estudios leonardinos del movimiento de los fluidos. En 1948 - 1950 me había contado de sus propias lecturas; al morir él, quedó inacabado su manuscrito. Yo lo utilicé con provecho en los estudios míos, para los cuales se me ha concedido el tiempo necesario para que llegasen a ser mucho más completos que lo que pudieron los suyos. En el año 1962, tuve el privilegio de publicar este manuscrito en el *Archive for History of Exact Sciences,* Volumen 2, Núm. 1. Finalmente, doy las gracias a los Profesores M. Clagett, E. Gombrich, y J. White por sus provechosas críticas, y al Dr. L. Reti por su ayuda con respecto a Martini.

II. PROGRAMA PARA EL REDESCUBRIMIENTO DE LA MECANICA RACIONAL DE LA ILUSTRACION

El epitafio de Newton debido a Pope,

"La naturaleza y sus leyes quedaban ocultas en la oscuridad. Dios dijo, sea Newton, y la luz se hizo,"

es una clara muestra del impacto causado por la publicación del *Principia* en 1687. Tal impacto, aún perceptible, se reflejó en Mach de parecida manera:

"Newton descubrió la gravitación universal y completó el enunciado formal de los principios de la mecánica generalmente aceptados hoy en día. No se ha enunciado ningún principio esencialmente nuevo desde su tiempo. Todo lo que se ha conseguido en mecánica desde entonces ha sido un desarrollo deductivo, formal, y matemático basado en las leyes de Newton."

Así pues, Mach afirma que

1) Newton descubrió una gran parte de la mecánica.
2) La mecánica de Newton forma un sistema completo.

(De hecho, Mach escribe,

"Los principios de Newton bastan por sí mismos, sin la necesidad de introducir nuevas leyes, para explorar en detalle todo fenómeno mecánico que ocurre en la práctica").

3) Desde los tiempos de Newton no se ha hecho nada fundamental en mecánica.

No es raro encontrar un poeta que se muestre de acuerdo con las ideas de filósofos o científicos. A menudo los poetas han sido capaces de exponer con elocuencia la filosofía de la generación anterior o la ciencia del siglo anterior. Lo raro del caso que aquí comentamos es que el poeta ha llegado a predecir los puntos de vista que expresaría un físico-filósofo de 150 años más tarde.

En 1788, cien años después del *Principia,* se publicó la *Méchanique Analitique* casi tan elogiada como su antecesora. Las historias de la ciencia más populares se vuelcan entusiásticamente sobre esta obra de Lagrange, citando el juicio que le mereciera Hamilton: es "como un poema científico". De dos maneras este libro ha obstaculizado el conocimiento de muchas investigaciones realizadas en épocas anteriores a su aparición. En primer lugar, el científico actual ha aceptado, bien que de manera indirecta a la *Méchanique Analitique* como receptáculo final de todos los estudios que la precedieron. En consecuencia, no ha sentido la necesidad de ir tras sus fuentes y averiguar cuáles han sido sus lagunas. En segundo lugar, Lagrange incluyó en su *Méchanique Analitique* unos resúmenes históricos de la Estática, de la Dinámica, y de la Mecánica de los Fluidos, que en sus líneas generales, aunque no en

Fig. 34. Isaac Newton (1643-1727), según un grabado de 1712 debido a John Smith, basado a su vez en un cuadro de Sir Godfrey Kneller

sus detalles, también se han aceptado. Casi todas las páginas de Mach[1] sobre estudios realizados antes de 1800 parecen estar basadas bien en las mismas fuentes que cita Lagrange, bien en meras conjeturas plausibles acerca de la gestación probable de tales descubrimientos, por lo menos, de cómo se le podrían ocurrir a una persona racional.

Pero he aquí que la nueva escuela de historiadores de la ciencia, que comienza con Duhem y cuyas filas van engrosando día a día, ha podido derribar la primera de las principales tesis de Mach, a saber, el que la mecánica clásica hubiera sido creada tan sólo por Galileo y Newton. No sólo han encontrado que los contemporáneos y predecesores de Newton no eran tan poco ilustrados como se había pensado, sino que, es más, los conceptos de la mecánica occidental iban desarrollándose de una manera amplia e intensiva a lo largo de toda la Edad Media y el Renacimiento, si bien no siempre de modo continuo. Los historiadores de la ciencia ya no toman lo bastante en serio la tesis histórica de Mach como para molestarse siquiera en refutarla. Desgraciadamente, por omisión, han dejado en pie la visión de Mach sobre la *naturaleza* de la mecánica en sí, y en particular, su afirmación acerca de la complitud de la formulación de Newton. A juzgar por sus obras, los historiadores también parecen pensar que la mecánica se detuvo con Newton, excepto por los desarrollos formales asociados con científicos más recientes y que se encuentran ya en los libros de texto. Nadie se ha tomado la molestia de investigar el crecimiento de la mecánica a partir de Newton. Los científicos, a pesar de la escasa atención que prestan a la investigación histórica, no sólo han compartido la indiferencia de los historiadores por los posteriores desarrollos matemáticos de la mecánica, sino que, por lo general, tampoco han hecho caso de lo que los historiadores han conseguido aprender sobre períodos anteriores. Les ha bastado el esquema de Mach o incluso un resumen elemental del mismo. Entre Lagrange y Mach, entre historiadores y científicos, han conseguido que la Era de la Ilustración quede como el Medievo de la historia de la mecánica.

Sin embargo, no es ni la primitiva mecánica de Newton ni la mecánica física de Mach la que se suele presentar en las aulas como la más fructífera, la más comprobada y comprendida, y la más perfecta de las ciencias de la naturaleza —prototipo y modelo de una teoría matemática aplicable a fenómenos físicos. Más bien, se enseñan las partes más sencillas de la mecánica racional forjada por los Bernoulli, por Euler, y sus sucesores. ¿De dónde procede esta mecánica? ¿Cuál fue su motivación? ¿Cómo se construyó? ¿Cuáles fueron sus éxitos y cuáles sus fracasos? ¿Qué debe esta mecánica a las matemáticas, a la experiencia, al experimento? ¿Cómo contribuyó a su vez al enriquecimiento general de éstos?

Para responder a estas preguntas, propugno la necesidad de un programa para redescubrir la Mecánica Racional de la Ilustración. El presente trabajo es un esquema de tal programa. Partes del mismo han sido completadas y publicadas, como por ejemplo, mis tres ensayos mencionados al final; otras, en cambio, apenas han sido bosquejadas. Mejor que crear un todo orgánico y dejar a los lectores la tarea de buscar el esqueleto que lo sostiene, he preferido ofrecer un pequeño muestrario de las riquezas que esperan a aquellos dispuestos a examinar los polvorientos volú-

---

[1] Me refiero a la primera edición de *Die Mechanik in ihrer Entwicklung, historisch-kritisch dargestellt*, Leipzig, 1883. En ediciones posteriores, incorporó Mach diversos pasajes acerca de lo que había aprendido de segunda mano de Wohlwill y Duhem, pero no modificó apreciablemente sus dictámenes anteriores.

menes desde una perspectiva matemática, lo que nadie ha hecho durante dos siglos. Con esto espero estimular en otros el placer de descubrir por su cuenta.

1. EL *Principia* DE NEWTON (1687)

Como el *Principia* es una de aquellas obras de las que todo el mundo habla pero nadie lee, todo lo que se diga acerca de ella que no sea el habitual elogio azucarado ha de hacer frente a la indignación general. No obstante, es una obra científica y no una biblia. Se debe estudiar y sopesar; desde luego hay que admirarla, pero no creer que posee la verdad absoluta. Contiene sus novedades y sus repeticiones, elegantes perfecciones junto con errores, atajos ágiles y rodeos innecesarios, extraordinario rigor al lado de lagunas en el desarrollo lógico, la eliminación de hipótesis ya enunciadas y la introducción de hipótesis previamente no enunciadas.

Dudo que actualmente viva nadie que haya estudiado a fondo el *Principia;* pero solamente tal hombre podría con justicia emitir los juicios que sobre esta obra suelen leerse en cualquier ensayo vulgarizador acerca de la ciencia o de su historia. Aquí voy a presentar un intento de resumen exploratorio basado en el detallado estudio de algunas partes de la obra y en un esfuerzo de sondear el resto.

El *Principia* comprende tres libros muy distintos entre sí. Su reputación consagrada se debe sobre todo a la primera mitad del Libro I, que trata el movimiento de uno o dos cuerpos en el vacío. Mach sabía que esta materia no era precisamente original e investigaciones históricas más recientes han demostrado que la mayor parte de su contenido, tanto lo referente a los principios físicos como a las conclusiones, se pueden encontrar en escritos anteriores. No sería una simplificación excesiva el afirmar que en su tratamiento de este tema el *Principia* es una obra de carácter retrospectivo que selecciona, ordena y formaliza los logros del siglo anterior.

Aunque los contemporáneos de Newton se dieron perfecta cuenta de este aspecto del Libro I, lo admiraron en gran manera, ya fueran o no partidarios de las ideas allí expuestas. En primer lugar, lo que Newton escribe es correcto, claro y conciso. En obras más tempranas, los descubrimientos originales son como joyas ocultas en el seno de un fango de verborrea, minucias en exceso, metafísica, confusionismo, y errores. Como contraste, Newton resulta una veta de oro puro.

Pero fue otra propiedad, de mayor importancia, la que impresionó a los lectores del *Principia.* Al comienzo del Libro I aparecen los famosos *Axiomas, o Leyes del Movimiento:*

> "I. Todo cuerpo permanece en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme, a menos que sea obligado a cambiar dicho estado por fuerzas aplicadas sobre él mismo.
>
> "II. La variación del movimiento es proporcional a la fuerza motriz aplicada, y ocurre sobre la línea recta según la que se aplica dicha fuerza.
>
> "III. A toda acción le corresponde siempre una reacción igual y contraria; o bien, las acciones mutuas de dos cuerpos entre sí son siempre iguales y dirigidas hacia partes contrarias."

El Libro I es el primer tratado general de la Mecánica, estructurado y deducido a partir de unas leyes fundamentales. Para los lectores de su tiempo, el gran mérito de la obra radicaba en esta base deductivo-matemática. A partir de un escaso número de axiomas sencillos habían quedado demostradas todas las propiedades principales del movimiento de los cuerpos.

Resulta tanto más asombrosa la brevedad del *Principia* cuando se considera la multitud de diversos fenómenos que tan acertadamente consiguió ordenar. Los an-

tiguos eran capaces de proponer afirmaciones matemáticas precisas –correctas o no– sobre los desplazamientos de los planetas, pero a la hora de considerar los movimientos sobre la superficie de la tierra, lo hacían de manera mayormente cualitativa, utilizando los conceptos de "causa", "efecto", y "tendencia", lenguaje también usado por aquel entonces en biología y medicina. Galileo mantuvo esta distinción entre geometría celeste y mecánica terrestre, pues él, que tanto se esforzó en dar a conocer las propiedades cinemáticas del movimiento uniformemente acelerado (ya deducidas correctamente por los escolásticos 300 años antes), había aumentado el abismo que separaba la mecánica geométrica de los fenómenos mecánicos que aparecen en la práctica. En efecto, se negó rotundamente a relacionar entre sí los movimientos terrestres con los celestes, pero además, formuló unas leyes que supuestamente debían regir movimientos de conocimiento y experiencia comunes. En realidad, estas leyes sólo eran válidas en medios ideales o en el vacío, por lo que, para justificarlas ante el desgraciado investigador que trabaja sobre la superficie terrestre, Galileo se veía obligado a introducir unos "efectos" que hoy en día sabemos se deben a la resistencia o al rozamiento, pero para los cuales solamente daba una explicación en términos de cualidades o tendencias, al estilo de la física aristotélica por él tan criticada. Kepler había perseguido una física que fuera válida tanto para el firmamento como para la tierra, pero así como su brillante éxito en lo que atañe al sistema solar casi le llevó a descubrir la ley de la gravitación, no llegó a nada positivo con respecto a la mecánica terrestre. Descartes había afirmado categóricamente la existencia de una única mecánica, la cual regía por igual los cielos y la tierra, mas faltándole paciencia para completar los detalles, nunca llegó a profundizar lo bastante como para percatarse de que sus principios eran en parte incorrectos además de insuficientes. Importantes y duraderos fueron los avances logrados por Huygens en dinámica; su obra muestra en mayor grado que ninguna anterior la fecundidad de un enfoque numérico y gráfico de los fenómenos físicos frente al meramente descriptivo. No obstante, su mentalidad conservadora le impidió plantearse problemas a nivel planetario.

La segunda mitad del Libro I es una obra enteramente original, pero aquí empieza a fallar el programa newtoniano de deducir todo de una manera matemática a partir de los axiomas. Paso por alto las ingeniosas soluciones que Newton obtuvo para varios problemas sobre la atracción de esferas y esferoides, pues se basan en hipótesis estáticas formuladas de manera incompleta, además de apenas utilizar las leyes del movimiento.

Pero desde luego, la pieza maestra del Libro I es el estudio que hace Newton del problema de los tres cuerpos. Hay que precaver al científico moderno que no esté directamente familiarizado con la obra de Newton acerca de lo que encontrará en esta parte del Libro I. Aunque este científico considere las leyes de Newton como equivalentes a las ecuaciones diferenciales comúnmente llamadas "ecuaciones de Newton" en los modernos libros de texto, no existe evidencia alguna de que el propio Newton concibiera o utilizara sus principios en forma matemática generalizada. Con anterioridad a este problema, él plantea también en el Libro I el de los dos cuerpos, reduciéndolo con gran habilidad al problema equivalente de un cuerpo atraído por un centro fijo. Newton era muy capaz de formular este tipo de cuestiones mediante ecuaciones diferenciales y, luego, de resolverlas, expresándolas según su costumbre en términos de las componentes tangencial y normal a la trayectoria. Pero el problema de los tres cuerpos no puede simplificarse de esta manera. Newton no ofrece para este problema ninguna solución, ni lo que se entiende modernamente

por una solución aproximada; es más, ni siquiera llega a plantear ecuaciones del movimiento. El que, bajo este *handicap,* obtuviera algunas desigualdades correctas y que tanteando se acercara a los resultados aproximados de mayor importancia, es un tributo más a su increíble intuición física y una alabanza a su inteligencia excepcional. Sin embargo, esto no demuestra que su formulación de las leyes generales de la mecánica fuera adecuada. Ello viene comprobado por la Historia. Un mayor progreso no exigía un instrumento matemático mucho más refinado, pues Newton era un maestro en obtener soluciones aproximadas, cuadraturas, y desarrollos en serie para todo tipo de problemas matemáticos concretos. El hecho de que hubieran de transcurrir 50 años antes de que alguien mejorara sus resultados sobre el problema de los tres cuerpos demuestra que Newton había profundizado en el tema todo lo que sus métodos y conceptos permitían. El extraer tanto de una formulación tan primitiva de la mecánica requirió el genio de Newton. Ninguno de sus discípulos, de los que hubiera cabido esperar que ampliaran su formulación original, lograron el más mínimo avance. Hicieron falta cincuenta años de abstraer, precisar, y generalizar conceptos newtonianos para adelantar un solo paso. El primero en sobrepasar a Newton en su planteamiento del problema de los tres cuerpos fue Euler, el hombre que descubrió la manera de formular problemas mecánicos como problemas matemáticos perfectamente definidos. Como hemos de ver, el año en que se publicaron por vez primera las "ecuaciones de Newton" fue 1749 y no 1687.

El Libro I fue la coronación del programa de Kepler, pero Newton tenía el suyo propio. Un físico aristotélico afirmaría que en la Tierra los cuerpos no obedecen las órdenes de Galileo, y comentaría que los medios ideales o el vacío tan necesarios para que se cumplan estas órdenes no existen en ningún lugar de nuestro viejo y práctico planeta. Newton vio claramente que para poder despreciar el rozamiento había que calcular primero la magnitud de sus efectos, por lo que se planteó el problema de determinar matemáticamente la naturaleza del movimiento en el seno de medios resistentes. Salvo ciertas divagaciones, éste es el tema del Libro II.

Newton tenía que descubrir las leyes del movimiento de los fluidos si quería estudiar a fondo la resistencia que ofrecen los mismos y no tuvo precursor en este campo. Pero aquí su programa de deducción matemática comienza a flaquear, pues aunque el Libro II es casi enteramente original, gran parte de él es equivocado. Ante las dificultades que se presentan, van brotando nuevas hipótesis de la nada; se utilizan con toda libertad hipótesis que permanecen ocultas y las que han sido explícitamente enunciadas a veces no se utilizan para nada. Muy poco del Libro II se ha abierto paso en los libros de texto ni en historias de la ciencia; los fragmentos que sí lo han conseguido suelen estar mal interpretados. Newton hubo de crear *nuevos conceptos* para construir teorías sobre la resistencia de corrientes de aire, el flujo de un fluido por un orificio, la propagación de ondas en el agua, la oscilación del agua en un tubo, la resistencia que sufren los cuerpos en fluidos enrarecidos o densos, la propagación del sonido en el aire, y la fricción interna de los fluidos. El que muy pocos de sus conceptos se hayan conservado y que pocas de sus soluciones sean correctas no sorprende tanto, al considerarse que los temas eran completamente originales, como el que fuera capaz de llegar a una respuesta definida en todos los casos. El Libro II no es muy satisfactorio, pero por todo él corre un ingenio brillante que delimita las áreas y define los problemas que habrían de ocupar gran parte de las investigaciones que se realizaron en el siglo siguiente.

El Libro III queda fuera de este ensayo por su contenido astronómico. En él Newton comprobó que las proposiciones matemáticas del Libro I, con va-

lores numéricos adecuados, concordaban con los fenómenos del sistema solar.

En los tres libros que componen el *Principia,* Newton muestra su talla de gran teórico por su capacidad para: 1) *organizar, deducir matemáticamente, y refundir leyes y fenómenos conocidos pero aparentemente independientes entre sí;* 2) *crear conceptos nuevos; y* 3) *obtener predicciones numéricas detalladas y compararlas con valores medidos.*

Lo que no hizo en absoluto fue dar a la mecánica "clásica" su forma presente actual, pues sus principios no eran lo suficientemente claros y precisos. Si, por ejemplo, como Mach implica, las leyes de Newton bastan para determinar el movimiento de los fluidos, ni el propio Newton parece haberse percatado de ello. En efecto, no hace ninguna referencia al principio de la cantidad de movimiento en su estudio del flujo de los fluidos, sino que inventa un artificio ingenioso si bien incorrecto consistente en suponer a parte del recipiente cubierta por una capa de hielo que rodea una "catarata" de fluido para el cual supone entonces válidos los resultados obtenidos por Galileo respecto a la caída libre de los cuerpos. Newton cree resolver todos los restantes problemas hidrodinámicos que se plantea mediante el uso de razonamientos muy particulares, hipótesis *ad hoc,* e intuiciones más bien peculiares que en absoluto proceden de un sistema de la mecánica y tan sólo se relacionan de una manera vaga con ideas y principios mecánicos. De hecho, ni Newton ni ninguno de sus discípulos o rivales dominaban el principio de la cantidad de movimiento lo suficiente como para resolver cualquier problema relativo al movimiento de un cuerpo deformable.

Es de sobra conocida la posición tan dudosa del concepto "fuerza" en el *Principia* y sólo voy a comentarla de paso, Mach, siguiendo las huellas de Leibniz y D'Alembert, vio con bastante claridad este fallo en la formulación newtoniana. ¿Es la Segunda Ley tan sólo una definición de fuerza? Si así es, ¿cómo nos puede llevar a un conocimiento más profundo de las leyes de la naturaleza? Si no es una definición, ¿qué es fuerza? ¿Cómo la medimos? ¿Cómo la reconocemos? ¿No será una más de las viejas "cualidades" y "tendencias" que como tal, debe ser rechazada por la mecánica racional como mera denominación sin sentido?

Aunque Newton logró en parte diferenciar los conceptos de *masa* y *peso,* su idea de *cuerpo* era más bien ambigua. A veces, los "cuerpos" que aparecen en sus ecuaciones son los que hoy denominamos *masas puntuales,* pero en otras ocasiones, como ocurre en el problema de la atracción debida a una esfera, son cuerpos que ocupan regiones finitas del espacio. No define la *inercia* ni la *cantidad de movimiento;* a las leyes I y II se les suele considerar como una expresión del moderno principio del impulso lineal. Sin embargo, en una parte del comentario a la Ley I, leemos:

> "Una peonza, cuyas partes son de continuo apartadas de movimientos rectilíneos debido a su cohesión, no cesa de girar excepto en cuanto va siendo retardada por el aire."

Así vemos que Newton tomaba en cuenta la inercia rotatoria además de la lineal, pero no da ninguna medida de la misma, quedándose el lector sin pista alguna para descubrir qué principios rigen el movimiento de una rueda sobre un eje.

Esta deficiencia no se debe a una insuficiencia de métodos matemáticos o a una aplicación indebida de los mismos; por el contrario, es una consecuencia inevitable del obstáculo que se le presentó a Newton cuando quiso plantearse a la mitad del Libro I el problema de los tres cuerpos y que le obligó a volver la espalda a su programa original, fundado en demostraciones matemáticas, para contentarse con

aproximaciones intuitivas e incomprobables. Salvo para ciertos problemas particulares que aunque sencillos son importantes, Newton *no parece haber sido capaz de plantear ecuaciones diferenciales que rijan el movimiento de un sistema mecánico.* No corresponde al historiador adivinar lo que Newton habría sido capaz de hacer o podría haber hecho, ni tampoco le son relevantes las elaboraciones posteriores de Mach sobre los principios newtonianos: el hecho es que las ecuaciones no aparecen en el libro de Newton. Como veremos, la gran parte de los estudios sobre mecánica que aparecieron a lo largo de los 60 años que siguieron a la publicación del *Principia* se ocupan de buscar diversos principios con la intención de encontrar ecuaciones del movimiento precisamente para los sistemas que el propio Newton había estudiado y también para otros sistemas que hoy en día se consideran regidos por las "ecuaciones de Newton".

Resumiendo, en el *Principia* no aparecen ecuaciones para el movimiento de sistemas compuestos por más de dos masas puntuales libres, ni para sistemas con más de una masa puntual ligada; sus teorías acerca de los fluidos son en su mayor parte falsas, y temas tales como la peonza que gira y el resorte en tensión quedan fuera de su alcance.

Para no escandalizar en demasía a aquellas personas acostumbradas a la hagiografía habitual en la ciencia, cierro este breve repaso del *Principia* con un epitafio más justo de Newton, el que quedó grabado sobre su tumba:

> "Regocíjense los mortales de que un tan gran ornamento de la raza humana haya existido."

Este juicio queda fortalecido al conocerse lo que en realidad hizo Newton en el terreno de la mecánica: lejos de *completar* "el enunciado formal de los principios mecánicos hoy comúnmente aceptados", él lo *inició.*

Este es, pues, el exordio: los éxitos, las lagunas, y los fracasos de Newton en el *Principia,* 1687. El tema del próximo bosquejo será el siglo que acaba en 1788 con la *Méchanique Analitique* de Lagrange. Este último libro puede compararse con el *Principia* en las muchas alabanzas que ha recibido y en la gran influencia que ha ejercido; desgraciadamente, también tienen en común el ser libros mal conocidos e irresponsablemente citados.

2. El ambiente y los metodos cientificos durante la Ilustracion

Aunque en la actualidad hay muchos que clasifican a la Mecánica como una rama particular de la Física, no fue así considerada en la Ilustración, y la mecánica "clásica" no fue descubierta por los físicos. Los trabajos sobre Física publicados en aquella época eran, en general, de naturaleza experimental o especulativa y no se ocupaban de la teoría matemática. Estos físicos especulativos casi pueden considerarse herederos de la difusa y positiva tradición aristotélica tan atacada y despreciada por Galileo y Descartes; ninguno ha dejado huella en la historia de la Física. Aunque se hicieron algunos descubrimientos experimentales muy interesantes, éstos no influyen de manera directa en el desarrollo y crecimiento de la gran teoría matemática hoy día llamada "clásica". Esta teoría fue creada por un puñado de "geómetras" o "algebristas" –así eran llamados en aquellos tiempos– que se esforzaron en expresar de forma matemática las leyes que rigen la experiencia física común tan evidente para cualquiera que se tome la molestia de observarla.

Ellos fueron el máximo exponente de las nuevas matemáticas: el cálculo infinitesimal. Todos tenían, además de un gran talento matemático, un cierto interés en lo que hoy denominaríamos matemática pura. Cada cual tenía sus propios gustos: alguno experimentaba mucho, otros poco, y la mayoría no hacía experimentos de ningún tipo; algunos cultivaban la geometría pura y la teoría de números, y otros las dejaban a un lado. Pero en el estudio de la mecánica, todos tenían el mismo objetivo. Por mucho interés que ofreciera un problema particular, ninguno de estos geómetras se contentaba con la mera resolución del mismo, pues intentaban siempre darle un enunciado consistente con los principios de la mecánica y colocarle así en el lugar que le correspondía dentro del esquema general de la teoría. La expresión más clara de esta actitud –casi un resumen de lo que se hacía en la práctica– fue dada por D'Alembert en 1743:

1. La mecánica racional, al igual que la geometría, ha de basarse en axiomas que sean obviamente verdaderos.
2. Verdades posteriores han de obtenerse mediante demostraciones matemáticas.

Intentaba

"...recoger de la manera más abstracta y más sencilla posible el objetivo de esta ciencia, sin suponer ni admitir nada más allá de las propiedades que posea esta ciencia."

Los geómetras de la Ilustración daban tanta importancia a las demostraciones como dan los matemáticos puros de nuestros días. Mach se mofaba[2] de su "manía por la demostración". Los críticos victorianos veían con disgusto al siglo XVIII, pues les molestaban tanto sus patrones de raciocinio como su moral realista, y ridiculizaban sus excesos para así disminuir sus triunfos. Cierto es que se publicaron "demostraciones" del paralelogramo de fuerzas y de la existencia de Dios, pero éstos no fueron más que los detalles exóticos de un siglo que nos ha legado las teorías racionales de los fluidos y de los cuerpos rígidos, las ecuaciones de movimiento de los sistemas dinámicos, los principios de la flexión de vigas, y una visión general de las vibraciones elásticas. Pero en aquellos tiempos no siempre se habían percatado de manera clara de la necesidad de suponer *algo* –o, como decimos hoy en día, postular algo– en la mecánica tanto como en la geometría. No obstante, ya afirmó D'Alembert que el contentarse con recopilar u organizar conocimientos– por muy ciertos que éstos sean– y con poder resolver habilidosamente diversos problemas no era suficiente:

"Esto arruinaría la certeza de la mecánica y la rebajaría al nivel de una ciencia experimental."

Y como dijo Bertrand Russell, el admitir los resultados sin intentar demostrarlos, una vez que uno se ha convencido de su veracidad, tiene todas las ventajas del

---

2 Van der Waerden ha señalado que la crítica que hace Mach de la demostración dada por Arquímedes de la ley de la palanca ("griechische Beweissucht" y "falsche und verkehrte Strenge") de hecho sustituye el razonamiento de éste por otro incorrecto de cosecha propia en vez de tomarse la molestia de seguir lo que en realidad hizo Arquímedes. Véase B. L. Van der Waerden, "La démonstration dans les sciences exactes de l'antiquité", *Bull. Soc. Math Belg.* 4, 8-20 (1957). Existen falsificaciones semejantes en los resúmenes dados por Mach de posteriores obras matemáticas sobre mecánica, pero en todo caso, su tratamiento de la ciencia entera del siglo dieciocho es tan fragmentario y antihistórico que no merece un estudio detallado.

robo frente al trabajo honrado. Actualmente, la geometría y la mecánica se encuentran alejadas entre sí: todo el mundo reconoce que no existe geometría sin demostraciones, pero la mecánica se incluye dentro de la física, como una ciencia de origen empírico. Durante la Ilustración todavía no había aparecido este cisma absurdo, por el contrario, todo el programa de investigación de la mecánica procuraba evitarlo, pues cada generación conseguía explicar a la luz de las ciencias exactas un mayor número de fenómenos naturales. El programa newtoniano constituía una excepción sólo en cuanto a la claridad de su exposición y por el éxito que obtuvo:

"Así pues, la *geometría* se funda en la práctica de la mecánica, y no es más que aquella parte de la *mecánica universal* que enuncia y demuestra de manera precisa el arte de la medida. Pero como las artes manuales se ocupan sobre todo en mover cuerpos, en general sucede que la geometría trata las magnitudes, y la mecánica los movimientos. En este sentido, la *mecánica racional* será la ciencia que de manera precisa enuncia y demuestra cómo son los movimientos que resultan de la aplicación de fuerzas arbitrarias, y las fuerzas necesarias para crear movimientos arbitrarios."

Quizás, si los geómetras de la Ilustración no hubieran sobreestimado el poder del razonamiento matemático, no habrían alcanzado, gracias a él, un éxito tan grande, inigualado por sus predecesores.

Mach, así como sus discípulos actuales, confundió esta tendencia hacia el orden y la precisión con metafísica. Su oposición a la metafísica era tan violenta que desterró de su historia de la mecánica casi la totalidad del análisis y la búsqueda de los conceptos básicos de esta materia, dejando al lector con la impresión de que su desarrollo fue puramente experimental[3].

No se piense, sin embargo, que la elegante generalidad de la mecánica nació en la especulación filosófica. La mecánica es una ciencia basada en la experiencia; el teórico ha de comparar la experiencia física con la experiencia contenida en teorías anteriores edificadas para explicar los mismos fenómenos. La historia de la mecánica racional no es ni experimental ni filosófica: es *matemática;* es una historia de *problemas particulares,* ejemplos muy concretos para la resolución de los cuales hubo que crear *nuevos principios y métodos.* Pero no bastaba con dar la solución de un problema; puesto que sólo existía una mecánica verdadera, el caso particular no era un fin en sí mismo sino una *guía hacia las generalizaciones correctas.* El orden y el diseño de la estructura teórica eran tan importantes como la validez de sus componentes. D'Alembert escribió en 1743,

"Hasta la fecha, ...se ha dado una mayor importancia a engrandecer el edificio que a iluminar la entrada, a aumentar su altura que a fortalecer sus cimientos.

"En esta obra me he propuesto el doble fin de extender las fronteras de la ciencia de la mecánica y de allanar su camino, y mi objetivo principal ha sido alcanzar, en la medida que he podido, uno de estos fines a través del otro; esto es, no sólo deducir los principios de la mecánica

---

[3] Incluso hoy día encuentro que hay personas que respetan a Mach como historiador, aunque parece ser que la mayoría de ellos sólo conocen su libro de oídas. Hay varios pasajes que tal vez resultarían instructivos a estas personas. Por ejemplo, todo matemático practicante en la actualidad atribuye a Galileo la demostración de que el número cardinal de una subsecuencia infinita de los números enteros es aquel de los propios enteros; veamos el comentario correspondiente de Mach: "Las consideraciones atomistas de Galileo... le llevaron a extrañas disquisiciones acerca del continuo y a especulaciones místico-matemáticas sobre lo finito y lo infinito, las cuales recuerdan, por un lado, a Nicolás de Cusa, y por el otro, intensamente, a ciertas investigaciones matemáticas modernas, de las cuales tampoco se puede decir que estén del todo libres de misticismo." (§ 22 Capítulo 2 de *Die Mechanik...,* 9.ª edición, 1933.)

a partir de las ideas más claras, sino también aplicar estos principios a nuevos problemas; poner de manifiesto la inutilidad de algunos de los principios hasta la fecha usados en Mecánica y las ventajas que se pueden sacar... de otros principios; en una palabra, extender el alcance de estos principios reduciendo su número."

Con el orden y la precisión surgieron la elegancia y la belleza. Aunque estos dos conceptos están desterrados de cualquier filosofía positivista de la ciencia, su influencia resulta evidente para cualquier persona que haya conocido algún matemático puro de nuestra época. Tanto es así que en la actualidad algunos opinan que las matemáticas no son una ciencia ya que no son experimentales y sus criterios de perfección son más bien de orden estético que utilitario.

El hecho de que las matemáticas y la música, ambas practicadas con igual celo, fuesen las glorias de la Ilustración era tan claro para los hombres de dicha época como lo es ahora para nosotros. En su tercer viaje, Gulliver va a Laputa, una isla que se sostiene magnéticamente en la atmósfera, habitada por una raza totalmente dedicada a las matemáticas y a la música,

"...uno de sus ojos vuelto al interior y el otro mirando directamente al cénit."

Estas gentes se abstraen tanto en los cálculos matemáticos o en la composición musical que han de ser acompañados por un criado provisto de una vejiga llena de guisantes secos o de guijarros con la que les golpea suavemente en la boca o en la oreja cuando tienen que hablar o escuchar, y también les avisa para que no se caigan en cualquier agujero o se golpeen la cabeza contra los postes. En una comida,

"Como primer plato había una pierna de cordero cortada en forma de triángulo equilátero, un trozo de vaca con forma de rombo, y un pudin con la forma de una cicloide. Como segundo plato, aparecieron dos patos preparados de modo que parecieran violines; salchichas y pudines que parecían flautas u oboes, y un pecho de ternera en forma de arpa. Los criados cortaron nuestro pan en forma de conos, cilindros, paralelogramos, y otras varias figuras matemáticas...

"Sólo expresan sus ideas en términos de líneas y figuras. Si quisieran, por ejemplo alabar la belleza de una mujer, o de cualquier otro animal, lo harían mediante rombos, círculos, paralelogramos, elipses, y otros términos geométricos, o bien por medio de palabras artísticas tomadas de la Música..."

Observemos aquí la precisión de Swift. En efecto, ha captado el espíritu de la mecánica, no el de la mecánica de su propia época, sino el espíritu del siglo anterior, el de Galileo. Las palabras de Swift no son más que una paráfrasis de un famoso párrafo del *Saggiatore:*

"La ciencia natural está escrita en este gran libro, que se encuentra siempre abierto ante nuestros ojos –me refiero al Universo– pero no lo podréis entender hasta que no lleguéis a comprender su lenguaje y hasta que no conozcáis los símbolos en que está escrito. Está escrito en lenguaje matemático, y los símbolos son triángulos, círculos, y otras figuras geométricas, sin las cuales sería imposible para el hombre aprender su contenido."

Swift escribía en el año 1726, en pleno período de transición. El nuevo lenguaje de la mecánica no era ya la geometría sino las fórmulas analíticas, o bien, como entonces se decía, el *álgebra;* hoy lo llamamos cálculo diferencial e integral.

Además, la alianza de las matemáticas con la música no fue accidental. Al tiempo que Swift atacaba a las dos disciplinas más gloriosas de su época, Bach y Haendel estaban en pleno apogeo creador. No mucho después, un excéntrico y semi-erudito rey prusiano, hábil intérprete de la flauta travesera, empleó a un célebre virtuoso

como su profesor particular, a un hijo de Bach como acompañista, y como coordinador de su academia a un discípulo de los Bernoulli a quien describió como un "gran algebrista". Este último, Leonard Euler, había escrito casi simultáneamente un tratado sobre mecánica analítica y otro sobre una teoría matemática de la música. D'Alembert, enciclopedista y literato, cuyas opiniones apreciaba Federico II por encima de las de cualquier otro, fue un matemático brillante aunque un tanto errático; también él escribió tratados acerca de la dinámica y de la teoría de la música.

Los abstraídos habitantes de la isla de Laputa vivían en la pobreza:

"Sus casas están muy mal construídas, las paredes inclinadas, sin que aparezcan ángulos rectos en ninguna habitación, y este defecto nace del desprecio que sienten por la geometría práctica la cual desdeñan por vulgar y mecánica... Y aunque son muy hábiles ante una hoja de papel..., pero en su comportamiento diario no he visto gente más torpe, desmañada, y poco habilidosa, ni que razone de manera tan lenta y confusa sobre cualquier otro tema que no sea ni la matemática ni la música... Les resultan completamente extraños los conceptos de imaginación, fantasía, e invención, y no tienen en su lenguaje ninguna palabra que exprese estas ideas; sus pensamientos y sus mentes están sepultadas en las dos ciencias antes mencionadas."

Démonos cuenta que para Swift, no sólo la matemática sino también la música carecía por completo de "imaginación, fantasía, e invención".

Aunque Swift odiaba las matemáticas y la música, no dejaba de sentir una cierta admiración por los logros de los moradores de Laputa. Son una raza superior, casi tiranos absolutos de un gran imperio sobre la Tierra; sin sus talentos la isla se vendría abajo destrozándose contra el suelo.

Pero no deben creerse nuestros colegas dedicados a las ciencias naturales que Swift les tuviera en mucha más estima, pues les desterró a la Gran Academia de Lagado, sobre la tierra vil. Allí viven en la más miserable mendicidad y se ocupan en actividades tan prácticas como extraer los rayos solares de los pepinos y transformar los excrementos humanos en comida, invirtiendo así los fenómenos de la Naturaleza.

En la realidad, Laputa representaba los departamentos de matemáticas de las academias y sociedades eruditas de Europa. La creación de estos centros del saber supuso la aceptación definitiva de la nueva ciencia algebraica. No hubo ninguna revolución al estilo de Galileo y Descartes en el siglo anterior. Pues el desarrollo de las investigaciones científicas a lo largo del siglo XVIII se ajustaba perfectamente a las directrices del programa newtoniano.

En el prefacio de su obra Newton escribió:

"Los clásicos veían dos facetas en la mecánica: la racional, que evoluciona con toda precisión a partir de demostraciones, y la práctica. A la mecánica práctica pertenecen todas las artes manuales, de las cuales se adoptó el nombre mecánica. Pero como los artesanos no trabajan con una exactitud total, sucede que la mecánica se distingue de la geometría en forma tal que a la parte que es exacta se la denomina geométrica, y a la que es menos exacta, mecánica. Pero los errores no son intrínsecos de este arte, sino de los artesanos. Aquel que trabaja con menos exactitud es el mecánico menos perfecto, y si alguien pudiera trabajar con total exactitud, ése sería el mecánico más perfecto de todos."

Lejos de ser el materialista en que Mach y los físicos quieren transformarle, Newton compartía plenamente la "manía por la demostración". A la propia magnitud de su empresa se debe el que no consiguiera aplicar este criterio con un éxito total. Quizás dándose cuenta de las imperfecciones que presentaba su Libro II, que por otra parte, es de una brillante originalidad, escribió:

"Ojalá pudiéramos deducir las restantes facetas de la naturaleza mediante el mismo tipo de razonamientos que se utilizan en el desarrollo de los principios de la mecánica..."

Newton sentó nueve "Hipótesis" como base para su "Sistema del Mundo" en el Libro III. En la segunda edición (1713) denominó "Phenomena" a las cinco últimas hipótesis consistentes en afirmaciones acerca de los planetas y de la Luna, y a las tres primeras las llamó "Regulae philosophandi", que se puede traducir como "Reglas de inferencia en las ciencias naturales". Si buscáramos las bases experimentales de su mecánica, habríamos de hacerlo entre estas "Reglas", pero aquí no las encontramos:

"Hipótesis 1. No admitiremos más causas para los fenómenos naturales que aquellas que sean tanto verdaderas como suficientes para explicar las apariencias de los mismos. Pues la Naturaleza es sencilla y no se vanagloria con la pompa de causas superfluas.

"Hipótesis 2. Y así, para efectos naturales del mismo tipo se tienen las mismas causas. "Como el respirar en los hombres y las bestias; la caída de piedras en Europa y en América; la luz en el fuego del hogar y en el sol; la reflexión de la luz en la Tierra y en los planetas.

"Hipótesis 3. Todo cuerpo puede ser transformado en un cuerpo de cualquier otro tipo, y puede ir tomando sucesivamente todos los grados de cualidades intermedios."

Esta última hipótesis es difícil de entender y no suele ser mencionada por los historiadores de gusto empírico. Más o menos, lo que quiere decir es que los fenómenos físicos ocurren de una manera continua, y no a saltos; pudiera denominársela "hipótesis no cuántica". Podemos suponer que su intención fue hacer valer la relevancia física de las derivaciones e integraciones que aparecen en casi todas las páginas del *Principia*[4]. No es más que la "ley de continuidad de Leibniz" tan conocida por los estudiosos del siglo XVIII, y tan frecuentemente invocada por los geómetras continentales, incluso después de haber demostrado Euler que era insostenible.

En la edición de 1713, Newton abandonó la atrevida postura especulativa de su juventud; ya tenía 69 años y su época creadora había pasado. Se sintió más inclinado a asegurar el alcance de su sistema que a fortalecer sus cimientos. Reemplazó la Hipótesis 3 por otra completamente distinta:

"Regla 3. Aquelias cualidades de los cuerpos que no admiten aumento o disminución, y que se presentan en todos los cuerpos al alcance de la experimentación, han de tomarse como cualidades comunes de todos los cuerpos, cualesquiera que sean éstos."

La larga glosa que sigue a esta regla comienza así, "Pues ya que las cualidades de los cuerpos permanecen desconocidas para nosotros excepto a través de experimentos...". Y no se crea el positivista que aquí vaya a encontrar nociones de su gusto, pues la intención de Newton no puede ser menos experimental. Lejos de restringirnos a magnitudes medidas experimentalmente, Newton nos ordena que tomemos las magnitudes observadas en cuerpos experimentales y que las *generalicemos* a cuerpos sobre los que *no* podemos experimentar[5]. Así replicó a los

---

[4] Los historiadores siguen repitiendo las viejas sentencias decimonónicas según las cuales Newton "encubría sus métodos" y presentaba mediante "geometría griega" demostraciones de proposiciones que había "descubierto por el uso del cálculo". Si bien es cierto que no utiliza Newton la notación de fluxiones en el *Principia,* el matemático actual, al que le merecen poco respeto aquellos que confunden noción con notación, encuentra a esta obra densa en la teoría y la aplicación del cálculo infinitesimal.

[5] En la edición de 1726, siguiendo a las controversias sobre la gravitación, añadió Newton una cuarta regla al efecto de que cuando generalizamos a partir de fenómenos conocidos, han de tomarse como ciertos nuestros asertos hasta que fenómenos nuevos demuestren su falsedad,

Fig. 35. Jaime Bernoulli (1655-1705), retrato hecho en 1686 por su hermano, Nicolás Bernoulli, en el Alte Aula, Basilea

escépticos que le reprocharon sus especulaciones puramente matemáticas acerca de las fuerzas que regían lugares por él nunca visitados, como el Sol y la Luna.

3. Los descubrimientos de Jaime Bernoulli

La creación de la mecánica racional se debe tanto a Jaime Bernoulli como a Newton, a pesar de que la obra del primero es conocida por pocos. Las zonas de la mecánica que Newton dejó sin tocar las cultivó Jaime Bernoulli, aunque los enfoques y los métodos de estos dos grandes fundadores de la mecánica moderna diferían tanto en sus principios como en sus detalles. Mientras que Newton insistía en la idea de movimiento como resultado de una acción a distancia, Jaime Bernoulli desarrollaba la idea de acción contigua y la relación entre dinámica y estática.

Cuando Leibniz, Huygens, y Juan Bernoulli resolvieron en 1690 el problema de la curva catenaria, los tres lo hicieron utilizando métodos especiales. Las soluciones de Leibniz y de Juan Bernoulli se apoyaban en un teorema debido a Pardies (1673), relativo al centro de gravedad de un arco; a su vez, este teorema presuponía que la acción de cualquier parte de un arco pesado sobre su vecina es equipolente a una fuerza tangencial que actúa sobre la juntura. Jaime Bernoulli atacó el problema genérico del equilibrio de una cuerda que sufre una carga arbitraria a lo largo de su longitud. Conservando el concepto de fuerza de contacto debido a Pardies, lo formalizó como la *tensión* de cualquier cable flexible y consiguió obtener las *ecuaciones diferenciales generales para el equilibrio* que determinan la forma y la tensión a partir de la carga aplicada. Es más, llegó a encontrar cuatro métodos diferentes para deducir estas ecuaciones: equilibrio de fuerzas normales y tangenciales, equilibrio de fuerzas según dos direcciones fijas, equilibrio de momentos, y el principio de los trabajos virtuales. Esta investigación se llevó a cabo entre 1691 y 1704, pero no fue publicada hasta 1744; parte de ella la volvió a realizar Hermann, discípulo de Bernoulli, y la publicó en 1716.

En 1684 Leibniz había dado el primer análisis de la tensión en las fibras interiores de una viga sometida a una carga; bajo la hipótesis de que esta tensión varía linealmente sobre la sección recta, concluyó, para un caso particular, que el momento de flexión es proporcional al momento de inercia de la sección. Jaime Bernoulli encontró experimentalmente que no se satisfacía la relación lineal que habían inferido Hooke y Mariotte y adoptado Leibniz, entre la extensión y la fuerza de estiramiento. No admitió por tanto la validez de esta relación como principio general, y hasta el fin de sus días sostuvo que era sólo un caso particular. Obtuvo la primera teoría de la flexión basándose en un modelo que consideraba a la sección de una barra doblada como una palanca apoyada sobre un punto del lado cóncavo y retenida por un resorte por la parte superior. Si el resorte es lineal, se obtiene la ecuación diferencial de la *elástica* (1694), pues entonces el momento de flexión es proporcional a la curvatura de la banda.

"de modo que el argumento de inducción no pueda evadirse mediante hipótesis". Esta es una defensa ilógica dado que generalizaciones distintas pueden ser perfectamente compatibles con las mismas observaciones. Newton quiere implicar que ya que la gravitación universal lo explica todo satisfactoriamente, no ha de admitirse ninguna otra hipótesis hasta que demuestre ser falsa la gravitación universal. En otras palabras, la *primera* teoría adecuada tiene el derecho de predominio sobre otras posteriores igualmente adecuadas.

Fig. 36. Juan Bernoulli (1667-1748), según un grabado hecho en 1741-1742 por Johann Jakob Haid y Aug. Vindelic, basándose en un cuadro de Johann Rudolf Huber. Señala Bernoulli una figura que explica su solución del problema de la braquistocrona.

Huygens se dió cuenta, al igual que Beeckman y Hooke antes que él, que en la flexión, se contraían las fibras internas y se distendían las externas. Cuando se le hizo esta objeción a Jaime Bernoulli, éste intentó construir una teoría que permitiera localizar la posición de la fibra neutra o inextendida. Intentó integrar sobre la sección recta de la viga, tal y como Leibniz había hecho para el caso de flexión despreciable, pero nunca consiguió llegar a un resultado correcto –en parte, porque siempre se negó a doptar hipótesis restrictivas acerca del material de la viga. Finalmente propuso un principio general que resulta ser incorrecto; a partir de él dedujo que la posición de la línea neutra es irrelevante, lo que también es falso. Este problema que tanto se esforzó por resolver, el de deducir una teoría unidimensional de las vigas a partir de una descripción completa del estado de la tensión elástica interior, permanece hasta la fecha sin resolver. Casi desconocidos, quedan sin publicar los mejores trabajos que él hizo sobre este tema.

A lo largo de estas investigaciones, Jaime Bernoulli fue dando forma a un concepto general de la respuesta elástica en una dimensión. Al tiempo que Beeckman habíase dado cuenta de que el cociente (variación de longitud/longitud), o bien, la *deformación,* es lo que debe aparecer en una ley elástica, Hooke se había contentado con medir la variación de la longitud como una función de la fuerza de estiramiento. Jaime Bernoulli observó por otra parte que una relación que diera el cociente (fuerza/área), es decir, *esfuerzo medio,* como función de la deformación, caracteriza más bien al material que a una muestra particular del mismo (1704). Esta es la primera aparición de una verdadera relación *esfuerzo-deformación* y de una *propiedad material* de un medio deformable. Tan sólo la desconfianza que sentía Bernoulli hacia la ley de Hooke le impidió introducir el llamado módulo de Young; su tratamiento del tema implica la existencia de lo que recientemente se ha dado en llamar "módulo tangencial" de una relación no lineal esfuerzo-deformación.

La dinámica de los cuerpos rígidos, jamás estudiada por Newton, nació con la famosa solución que dió Huygens para el péndulo físico (1673). De hecho, Huygens supuso que la energía cinética de traslación que adquirían las partes de un cuerpo con la caída libre de éste, era suficiente para que en caso de separarse éstas entre sí, pudiesen elevarse a una altura tal que el centro de gravedad volviese a su nivel original. Este ingenioso razonamiento, da la solución correcta para el problema de la oscilación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo, pero, aparte de no tener apenas relación alguna con cualquier otra idea en el campo de la mecánica, carece de sentido cuando se quiere aplicarla al movimiento más general de un cuerpo rígido. Jaime Bernoulli buscaba un principio general de la mecánica a partir del cual se siguiera la solución de Huygens. En 1686 intentó, infructuosamente, hallar este principio general y en 1691 logró crear una concepción nueva de la mecánica, la cual desarrolló en un trabajo fundamental que publicó en 1703. La influencia que tuvo éste sobre la evolución posterior de la disciplina sólo es comparable a la que tuvo el *Principia.* En este trabajo, descompone la aceleración de cada masa en dos componentes; la normal a la trayectoria debida a la ligadura que supone la rigidez y la tangente a la trayectoria, que a su vez divide en dos partes: una es la aceleración debida a la gravedad, y la otra es la aceleración producida por la interacción mutua entre las masas al estar éstas unidas. Bernoulli viene a firmar que un sistema de fuerzas de este último tipo ha de estar equilibrado. Aplicando el principio de la palanca, se obtiene de inmediato la solución de Huygens.

En el método de Jaime Bernoulli se anticipan tres importantes ideas de la mecánica:

1. El introducir fuerzas que mantengan las ligaduras para determinar el movimiento de un sistema ligado.
2. Si se les cambia el signo a las aceleraciones de los cuerpos, éstas son equivalentes a fuerzas estáticas (por unidad de masa).
3. No basta con el equilibrio de fuerzas para resolver problemas de dinámica o estática. Hace falta también el equilibrio de momentos.

Sería una exageración el afirmar que Bernoulli llegó a enunciar con claridad ninguno de estos principios o a distinguirlos entre sí. Más bien, aparecen mezclados y a medio implicar a lo largo de su obra. Es tan difícil y tan necesaria la organización de la ciencia como el descubrimiento de ideas fundamentales; con vista a su aprovechamiento, la llave del tesoro es tan importante como el propio tesoro. Incluso un especialista en mecánica con el beneficio de la experiencia acumulada encontrará difíciles las obras de Newton y Jaime Bernoulli. El reconocer, distinguir, y formular los conceptos y métodos de estos dos grandes hombres exigió, como ahora veremos, la labor incesante durante medio siglo de los mejores geómetras.

4. Primeros intentos de aclarar, extender y organizar los principios de la mecanica

Anteriores a la obra de Newton, ya existían otros enfoques de la mecánica que se desarrollaban con muy distinto éxito. La relación entre fuerza y movimiento es el problema primario de la mecánica occidental, pero 'fuerza' es una palabra muy vaga con un significado distinto para cada persona. Aún hoy en día la seguimos utilizando con muy diversos significados: la fuerza de la costumbre, la fuerza de la razón, razón de fuerza mayor, fuerza militar, y también fuerza mecánica. Ya en el siglo XVII todo el mundo relacionaba la fuerza mecánica con una sensación muscular y sabía que era la causante, o al menos, acompañaba a los movimientos. Pero, ¿cómo se mide la fuerza? ¿Cómo relacionar la fuerza con una cantidad además de una cualidad? Newton esquivó el problema, refiriéndose directamente al concepto fuerza como si éste no necesitara una definición. De hecho, podía haberse ahorrado este concepto, pues al igualar 'fuerza' con 'masa' multiplicada por 'aceleración' en problemas dinámicos sencillos, estaba suponiendo unas expresiones particulares para la aceleración y resolviendo los problemas cinemáticos a que éstas daban lugar. Hoy en día resolvemos este tipo de problemas prácticamente de la misma manera, aceptando que el fin justifica los medios, pero seguimos sin enfrentarnos con el interrogante que hizo inaceptable el enfoque newtoniano para la mayor parte de sus contemporáneos, que lo consideraban como un brillante artificio para escaparse a la naturaleza real de las leyes mecánicas. Estos contemporáneos suyos buscaron un enunciado sencillo y *general* para el movimiento de todo cuerpo, a partir del cual se siguiera matemáticamente el movimiento de un cuerpo en particular bajo condiciones dadas.

Descartes había considerado que la medida de la fuerza venía dada por el producto (masa) x (velocidad) y afirmó también que la cantidad total de la misma no había variado desde la creación del Universo. En términos modernos, afirmó la

conservación del momento lineal. Siempre despreciativo para con los casos particulares, Descartes no llegó a aplicar su principio de manera suficiente como para darnos una idea clara de su significado para él. Nunca dijo que este principio fuera aplicable a todos los problemas, por lo que sería injusto recalcar que no es válido para el péndulo simple. Pero baste con este ejemplo para demostrar que el principio no es general. Criticando con toda justicia las opiniones de Descartes, Leibniz (1686, 1695), partidario de los problemas particulares, introdujo los conceptos de *fuerza viva* y *fuerza muerta.* La fuerza muerta es la antigua fuerza de posición, ya conocida por los escolásticos y hoy en día llamada energía potencial; la fuerza viva es igual a la masa por el cuadrado de la velocidad, justo el doble de lo que hoy se llama energía cinética. Según Leibniz, la pérdida de fuerza muerta correspondía a un aumento en la fuerza viva. Juan y Daniel Bernoulli adoptaron este principio y lo utilizaron para resolver brillantemente algunos problemas. Casi todos, si no todos, los problemas dinámicos que resolvió Newton, podrían resolverse igual aplicando el principio de Leibniz, combinado con el de Descartes allá donde este último pudiera aplicarse. Aún más, los principios del momento lineal y de la energía son enunciados relativos a la totalidad del sistema; no exigen, como ocurre con las leyes de Newton, subdividir éste en partes. Ahora bien, ambos métodos sólo nos determinan el movimiento de los sistemas más sencillos.

El enfoque newtoniano ha guiado la evolución de la mecánica hasta su forma actual. Pero hicieron falta los trabajos de Euler para aclarar y extender los conceptos newtonianos, para completarlos con ideas igualmente importantes, y para enseñar cómo se debían atacar. Euler (1707-1783) fue el más destacado físico teórico del siglo XVIII. En los libros de historia más corrientes su obra aparece muy disminuida; el breve resumen del viejo Handbuch der Physik atribuye a Euler más del doble de descubrimientos que a cualquier otro físico anterior o posterior, y esto omitiendo el mencionar la mayor parte de sus investigaciones. A la edad de 19 años y siendo todavía estudiante, Euler bosquejó un gigantesco tratado de la mecánica en seis partes, pero aunque solamente llegó a completar tres de ellas a lo largo de los siguientes 50 años, puede decirse que de hecho completó su programa a través de los centenares de trabajos que publicó y que abarcaban todas las ramas de la mecánica. Esto sin contar sus tratados sobre la ciencia naval, la balística y la astronomía.

No es solamente el gran número de sus trabajos lo que nos impide formarnos una idea justa de la importancia histórica de Euler sino también el hecho de que fuera él quien diera a la mayor parte de la mecánica su forma actual; aunque de una manera indirecta, todos hemos aprendido esta disciplina a través de sus libros y trabajos, y su manera de plantear y resolver los problemas es tan clara que llega a parecer obvia. A él se debe la construcción de la mecánica en términos claros y comprensibles. Es más, el científico actual que consulte los últimos trabajos de Euler los encontrará completamente modernos; no le ocurrirá así con otras obras del mismo período que le exigirán un cierto esfuerzo en su lectura, además de situarlas en su adecuada perspectiva histórica para poderlas apreciar con justicia.

La primera parte del programa de Euler, su *Mecánica,* apareció en 1736, cuando él tenía 29 años. Es el primer tratado de mecánica *analítica* propiamente dicha, en el cual todos los problemas se plantean y resuelven mediante procesos puramente matemáticos. Tanto durante este período como durante el resto de su vida, Euler siguió los pasos de Newton al considerar a la fuerza, en el mismo sentido con que se utiliza en estática, como un concepto básico. La *Mecánica* precisó a los principios mediante tres conceptos. En primer lugar, así como Newton había utilizado la pa-

labra "cuerpo" de manera vaga y con tres sentidos distintos por lo menos, Euler observó que los enunciados newtonianos son en general correctos sólo cuando se aplican a masas concentradas en puntos aislados; él fue quien introdujo el concepto preciso de *masa puntual,* y suyo es el primer tratado único y exclusivamente dedicado a este concepto. En segundo lugar, fue el primero en estudiar explícitamente la *aceleración* como una magnitud cinemática definida en el movimiento sobre una curva cualquiera. En tercer lugar, emplea el concepto de *vector* o "magnitud geométrica", una magnitud dirigida que se aplica no sólo a fuerza estática, aplicación ya bien conocida, sino también a la velocidad, la aceleración, y otras muchas magnitudes. La gama de temas que estudia Euler en este su primer tratado no es tan amplia como la que considera Newton en su *Principia.* Desarrolla de una manera sistemática y precisa el movimiento en tres dimensiones, pero el cuerpo más complejo que menciona es una única masa puntual. Siguiendo a Newton, Euler resuelve la aceleración según direcciones definidas intrínsecamente con respecto a la trayectoria curva de la masa puntual, aunque en algunos casos descompone fuerzas aplicadas según direcciones fijas en el espacio. Así pues, en este primer libro, Euler consolida una parte de la mecánica racional, pero sólo una pequeña parte.

5. Las frecuencias propias y los modos simples de sistemas en vibracion antes del descubrimiento de las ecuaciones del movimiento

El primer análisis matemático de una cuerda vibrante que llegara a algún resultado positivo fue llevado a cabo por Taylor en 1713. Obtuvo la frecuencia del modo fundamental que de hecho lo había supuesto de forma sinusoidal. Aunque no a partir de la teoría, y quedando el factor numérico sin determinar, ya habían sido obtenidas anteriormente las correspondientes leyes de proporción por Mersenne (1625) y Galileo (1638). Taylor aplicó la segunda ley de Newton a un elemento diferencial de la cuerda, pero a pesar de este prometedor comienzo, no reconoció el resultado como una ecuación diferencial del movimiento, y su trabajo se apoya en hipótesis *ad hoc* que además de confusas son en parte erróneas.

En 1727, Juan Bernoulli calculó la fuerza recuperadora para una cuerda tensa y de masa nula sometida a una carga de n masas iguales y equidistantes entre sí. Este modelo ya había sido estudiado por Huygens quien encontró la frecuencia para el caso $n = 1$. Bernoulli, utilizando un proceso cuasi-estático obtuvo la frecuencia fundamental para $n = 2, 3, 4, 5, 6$ ó 7.

De una manera experimental, ya había encontrado Mersenne (1633) que los armónicos de una cuerda tienen frecuencias $k\nu$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, donde ν es la frecuencia fundamental, y también experimentalmente Noble y Pigot (c. 1674) así como otros, demostraron que el k-ésimo armónico corresponde a una vibración con k - 1 nodos. Ni Taylor ni Juan Bernoulli hicieron caso de estos datos experimentales a pesar de que eran bastante bien conocidos y sus trabajos teóricos se restringen tácitamente al modo fundamental.

En unos trabajos que comenzó en 1733, Daniel Bernoulli fue el primero en comprender la naturaleza en general de las pequeñas vibraciones y en obtener para ellas una teoría parcial. El problema crucial era el de una cuerda de masa nula sobre la que se apoyaban dos pesos formando así un sistema que se suele denominar péndulo compuesto o bifilar. Mediante el uso de un procedimiento cuasi-estático

Fig. 37. Daniel Bernoulli (1700-1782), retrato hecho por Johann Niklaus Grooth en 1760, en el Alte Aula, Basilea

aplicado a un principio general que él había inventado para determinar el efecto de las ligaduras, pudo calcular las formas y las frecuencias de los dos modos e indicar que cuando se tienen n pesos, aparecen n modos distintos, cada uno con su propia frecuencia. También halló que para una cuerda de masa no nula hay infinitos modos, determinando las formas y frecuencias de los dos primeros. Aunque parece claro que conocía perfectamente la teoría de la cuerda tensa, que es mucho más sencilla de estudiar, no se molestó en publicar nada hasta muchos años después. Euler generalizó de inmediato todos estos resultados aunque utilizaba un principio dinámico distinto del de Bernoulli e igualmente restringido.

La ecuación diferencial para los modos simples de las vibraciones transversales en varillas elásticas fue descubierta simultáneamente por Daniel Bernoulli y Euler en 1734 aunque sólo la pudieron integrar mediante series. La ley de proporcionalidad resultante sirvió para comprobar la vieja sugerencia de Leibniz (1684) de que las propiedades elásticas y acústicas de los cuerpos están relacionadas. El primer análisis de un oscilador armónico simple impulsado por un generador armónico fue el dado por Euler en 1739, en el que insistió en el fenómeno de la resonancia, que hasta entonces no había aparecido en una teoría matemática, además de sugerir aplicaciones prácticas para impulsar una máquina que oscilara de manera natural mediante un motor oscilatorio. Poco después, aprendió a integrar explícitamente las ecuaciones diferenciales ordinarias y lineales con coeficientes constantes, lo que le facilitó mucho el problema de las vibraciones transversales en varillas. Ya para el año 1743 habían dado Daniel Bernoulli y Euler las condiciones que habían de satisfacerse en un extremo bien libre, o bien sujeto con abrazadera o pasador, y habían logrado distinguir los seis tipos posibles de vibración. Y para cuatro de estos tipos habían calculado las sucesiones completas de frecuencias propias y los cocientes nodales para los primeros modos con exactitud más que suficiente. Los trabajos de Euler resultaban más completos y elegantes pero Daniel Bernoulli se acercó más a los fenómenos físicos. En particular, Bernoulli fue verificando muchos de sus resultados mediante experimentos sencillos, gracias a los cuales a partir de 1742 comenzó a vislumbrar una justificación teórica al hecho de que se pudieran excitar simultáneamente dos o más modos simples en un mismo cuerpo.

Como veremos, la experiencia obtenida con el desarrollo de estas teorías especiales para explicar los fenómenos vibratorios ayudó en gran manera al establecimiento de los principios generales de la mecánica.

6. La mecanica de fluidos antes del descubrimiento de las ecuaciones diferenciales del equilibrio y del movimiento

Fueron dos problemas particulares, estudiados por primera vez en el *Principia* de Newton, los que dieron lugar a las grandes teorías que aparecerían en el siglo siguiente, aunque ya se conocían algunos resultados aislados acerca del movimiento de fluidos y varios importantes teoremas de la hidrostática demostrados por Arquímedes y Stevin. Primeramente, se planteó el problema de la geometría de la Tierra, la cual identificó Newton con la geometría del equilibrio para una masa de fluido en rotación sometida a su propia gravitación; llegó a la conclusión de que la Tierra estaba más achatada por los polos que por el ecuador. Por el contrario, los cartesianos consiguieron inferir de alguna manera a partir de sus sistemas de vórtices que la Tierra debía achatarse más por el ecuador. En ambas deducciones eran

muy dudosos tanto la aplicación de los principios físicos como los detalles matemáticos, pero quedó muy clara la total oposición entre las dos teorías mecánicas. Esto dio lugar a un fecundo tema de discusión que permitió tomar partido a muchas personas, aunque no entendieran ninguna de las dos teorías. Se propuso una comprobación experimental a gran escala, mandándose expediciones a diversos lugares de la Tierra para medir la curvatura de ésta. La expedición a Laponia fue la primera en regresar, presentando como resultado de sus medidas la conclusión de que en efecto la Tierra se encontraba más achatada por los polos. Gracias a esto, el jefe de la expedición, Maupertuis, fue aclamado como "el gran achatador". Para el profano quedaba así firmemente comprobada la validez del sistema newtoniano, pero el hecho era que la excentricidad medida no coincidía con el valor dado por Newton. Debida a esta discrepancia, los geómetras volvieron a leer de manera mucho más crítica el párrafo en que Newton obtuvo su resultado encontrando insegura toda su argumentación. Newton no había utilizado ni el principio de conservación del momento ni ningún principio de la hidrostática, pues éstos todavía no eran suficientemente comprendidos como para que su aplicación fuera posible. En su lugar, introdujo la hipótesis de que dos columnas de fluido perpendiculares entre sí, una axial y otra ecuatorial, que se encontraran en el centro de la geometría en rotación, debían tener igual peso. Tanto Huygens como MacLaurin propusieron nuevos principios; el segundo llegó a demostrar en 1741 que cualquier esferoide de rotación era una configuración de equilibrio, consiguiendo relacionar la velocidad angular con la excentricidad. De esta forma comenzó una búsqueda de las verdaderas leyes de la hidrostática.

En 1743 apareció el libro de Clairaut, *La Forma de la Tierra,* en el que se planteó el problema de determinar las posibles configuraciones de equilibrio para masas fluidas en rotación sometidas a una ley de fuerzas arbitraria. En esta teoría se encuentra por vez primera la noción de *campo vectorial generalizado.* Clairaut no pudo resolver este problema, pero llegó a la conclusión de que la compatibilidad de un sistema de fuerzas con un estado de equilibrio exige que el trabajo realizado al llevar estas fuerzas sobre cualquier camino cerrado sea cero; es decir, que el elemento de trabajo ha de ser un diferencial total. Quedó ésta como una condición a satisfacer por las fuerzas pero todavía faltaban por descubrir las ecuaciones generales de la hidrostática.

El segundo problema en mecánica de fluidos que quedaba sin resolver, a pesar de los intentos de Newton, fue el de la salida del líquido de un recipiente. Los primeros pasos para la resolución de este problema los dio Borda a finales del siglo XVIII, pero ya mucho antes otros intentos, aunque fallidos, habían abierto el campo de la hidrodinámica. Daniel Bernoulli (1727) fue el primero en aplicar correctamente el principio de la conservación del momento a un medio continuo, hallando la fuerza ejercida por un chorro que incide sobre una superficie inclinada. Su resultado es formalmente parecido a la fórmula de Newton para la resistencia de un cuerpo que se mueve en el seno de un fluido "poco denso", o bien un gas muy enrarecido, aunque las condiciones físicas son muy diferentes en ambos casos.

La *Hydrodynamica* de Daniel Bernoulli contiene el primer análisis correcto de la presión y la velocidad de un fluido en movimiento. Por *presión* se entiende en esta obra la fuerza ejercida por el fluido sobre las paredes del tubo o recipiente que lo contiene, y como medida de esta presión se toma la altura de una columna de fluido en reposo, que era la manera en que desde antiguo se medía la presión de un fluido en equilibrio. Llegó a una ecuación con la misma forma que la llamada "ecua-

ción de Bernoulli" para el flujo estacionario, pero sería absurdo imaginar que Bernoulli vislumbrara los conceptos que hoy en día se esconden tras esta ecuación. En su libro no intenta obtener las ecuaciones del movimiento ni descubrir la deformación de un medio continuo; en su lugar, considera al fluido como si fuera un bloque y hace desaparecer la pared del recipiente por debajo del punto donde se quiere calcular la presión. Mediante este artificio intelectual, el bloque de fluido que anteriormente se apoyaba sobre este punto experimenta un impulso que Bernoulli relacionó, utilizando un principio de conservación de la energía, con la presión que debe ejercer la pared para contener al fluido.

7. Las primeras ecuaciones diferenciales para el movimiento de sistemas

Tanto Juan Bernoulli como D'Alembert lograron en 1743 las primeras ecuaciones diferenciales para el movimiento de sistemas compuestos por más de dos masas puntuales. Los sistemas que sometieron a estudio fueron bastante generales, y por tanto, muy complejos. No obstante, como ocurre a menudo, no fue con los casos sencillos con los que tuvieron más éxito.

Las *ecuaciones generales de la hidráulica* para fluidos incomprensibles y no viscosos ya habían sido descubiertas por Juan Bernoulli en el año 1739. Aunque describiremos en el apartado 11 las principales innovaciones que introduce en este trabajo, hay que destacar el hecho de que utiliza un principio newtoniano: la fuerza aceleradora que actúa sobre una capa infinitesimal de fluido es igual a la masa de la capa por su aceleración. Y es ésta la primera aplicación de tal principio si exceptuamos las investigaciones de Jaime Bernoulli sobre centros de oscilación (§ 3) y los trabajos incompletos de Taylor en los que se ocupó de la cuerda vibrante. Resulta curioso que, habiendo deducido Bernoulli las magnitudes y relaciones suficientes para escribir las ecuaciones en derivadas parciales para el movimiento, no lo hiciera así, limitándose a integrar a lo largo del tubo. Su resultado constituye una generalización de la ecuación hidráulica de Daniel Bernoulli y aparece en un volumen con fecha 1742, pero publicado en 1743.

El mismo volumen contiene también otras investigaciones de Juan Bernoulli que se ocupan del péndulo bifilar y del problema genérico de la cuerda cargada con pesos. En este último problema, introduce el concepto de *tensión* en las distintas partes de la cuerda y, para el caso de la cuerda cargada con dos pesos, equilibra fuerzas con aceleraciones para deducir las *ecuaciones diferenciales para el movimiento finito.* Casi llega a deducir las ecuaciones generales en el caso de n pesos, pero al fin no lo consigue por restringirse innecesariamente. Ahora bien, en su desarrollo, es el primero en referir todas las posiciones a un *único sistema de coordenadas cartesianas rectangulares.* También en 1743, se imprime una obra de D'Alembert acerca de las ecuaciones diferenciales de pequeños movimientos de una cuerda cargada, deduciéndose éstas mediante un método general.

A los 24 años, D'Alembert publica un libro cuyo título indica claramente el programa de la mecánica durante la Ilustración: "Tratado de dinámica, en el cual se reducen al menor número posible y se demuestran de una manera nueva las leyes del equilibrio y del movimiento de los cuerpos, dándose también un principio general para encontrar el movimiento de varios cuerpos que reaccionan arbitrariamente entre sí", libro al cual nos hemos referido con anterioridad. En la práctica este libro

consigue mucho menos de lo que se propone. Al contrario de lo que generalmente se cree, D'Alembert no redujo la dinámica a la estática, ni fue el autor de ninguno de los dos enunciados dinámicos que hoy se conocen como "principio de D'Alembert", los cuales aparecieron más tardíamente y se debieron respectivamente a Euler y Lagrange. Pero suyo es el mérito de haber dado una regla general para obtener las ecuaciones del movimiento de sistemas con ligaduras: después de descomponer el movimiento en dos, uno, el movimiento "natural" y el otro debido a la presencia de las ligaduras, afirma que las fuerzas correspondientes a las aceleraciones debidas a las ligaduras forman un sistema en equilibrio estático. Este principio se puede relacionar con una de las ideas que expuso Jaime Bernoulli en su gran trabajo de 1703, y más directamente con un principio que enunció de manera muy confusa Daniel Bernoulli en su estudio de la cuerda colgante escrito en 1732-33 y publicado en 1740. La afirmación de D'Alembert tiene las mismas limitaciones que las de Descartes y Leibniz: se refiere al sistema en su totalidad y no a sus partes componentes por lo que resulta insuficiente para resolver los problemas generales de la dinámica. A pesar de ello, obtuvo ciertos resultados gracias a la admisión tácita de otros principios dinámicos. Aún más, fue el primero en expresar una ley del movimiento como una *ecuación en derivadas parciales* para el caso particular de una cuerda suspendida de masa no nula.

D'Alembert abría así un nuevo camino a la mecánica, opuesto por completo al pensamiento newtoniano que pronto tendría en Euler a su máximo defensor. El punto de vista de D'Alembert se puede resumir de la siguiente manera: si se conoce el movimiento, lo que llamamos fuerzas no son sino meras manifestaciones del mismo, que se pueden calcular a partir de él.

> "¿Por qué hemos de recurrir al principio tan popular hoy en día según el cual la fuerza aceleradora o deceleradora es proporcional al elemento (diferencial) de velocidad, principio que por otra parte sólo se apoya en un axioma más bien dudoso que afirma la proporcionalidad entre causa y efecto? No vamos a investigar si este principio es o no una verdad necesaria, solamente diremos que no nos convencen las pruebas que hasta la fecha se han aducido para el mismo; tampoco seguiremos el camino de otros geómetras que lo aceptan como una verdad puramente contingente, pues esto destruiría la certitud de la mecánica y la reduciría a una mera ciencia experimental. Nos contentaramos con observar que este principio (de la fuerza aceleradora), ya sea verdadero o dudoso, ya resulte claro u oscuro, no es de utilidad para la ciencia de la mecánica y debería ser eliminado de ésta."

Aunque no mencione el nombre de Newton, es toda la concepción newtoniana de la Mecánica lo que D'Alembert rechaza. Así como Pope y Mach admiraron a Newton por su claridad, D'Alembert no dudó en considerar a "las fuerzas inherentes a los cuerpos en movimiento", concepto básico en el razonamiento newtoniano, como "entes obscuros y metafísicos, que tan sólo sirven para enturbiar una ciencia que es la claridad misma".

En el campo contrario, Euler alabó a Juan Bernoulli por utilizar en sus estudios de hidráulica "el método verdadero y genuino", a saber, el balance newtoniano entre fuerza y aceleración. Euler vuelve a estudiar los sistemas ligados, de una manera parecida a como lo hiciera Bernoulli, pero de una forma más clara y con mayor generalidad. En 1744, construyó las ecuaciones diferenciales del movimiento finito para una cuerda tensa, cargada, y para n barras rígidas ligadas entre sí, utilizando en sus planteamientos sendos sistemas de coordenadas cartesianas rectangulares. El único principio mecánico utilizado fue el "newtoniano", y llegó a las integrales del momento lineal y de la energía cinética mediante cuadraturas. Esta fue la *primera*

aparición de ecuaciones diferenciales exactas para el movimiento de n cuerpos así como el primer ejemplo de lo que hoy en día aparece en los libros de texto de mecánica como "método newtoniano". En forma de corolario, aparece reconocida de manera explícita la importancia que tienen las integrales del momento lineal y de la energía cinética para el sistema. Mediante un ingenioso paso al límite en algunos corolarios de sus ecuaciones fundamentales, Euler dedujo un conjunto muy complicado de ecuaciones en derivadas parciales que regía el *movimiento finito de una cuerda continua,* pero fue incapaz de obtener conclusión alguna. Este trabajo fue impreso en 1751.

El mismo D'Alembert cuando dedujo en 1746 la *ecuación de onda lineal* para las vibraciones pequeñas de una cuerda, no siguió su propio principio mecánico, sino el método newtoniano. De hecho, se limitó a linealizar una ecuación hallada por Taylor pero que éste no había sabido desarrollar. La ecuación de onda de D'Alembert no fue, pues, la primera ecuación diferencial del movimiento en derivadas parciales obtenida, aunque sí la primera en alcanzar renombre.

8. Formulacion definitiva del principio del momento lineal: "los primeros principios de la mecanica" de Euler ("ecuaciones de Newton") (1750)

El problema general de la mecánica celeste y en particular el problema de los tres cuerpos aparece por primera vez en un trabajo de Euler escrito en 1747 y publicado en 1749. Planteó el problema en términos de un sistema de ecuaciones diferenciales. Con este estudio comienza el desarrollo sistemático de los principios newtonianos aplicados al sistema solar. El método utilizado es el mismo que creó Euler en sus trabajos sobre sistemas ligados que recientemente había acabado, aunque desde el punto de vista de la mecánica este nuevo problema resulta más sencillo y más fácil de enfocar. Como ocurre a menudo, se consiguieron resultados totalmente correctos antes de llegar a comprender el método general y se indujo la universalidad del mismo a partir de los éxitos obtenidos en casos muy particulares. El que sesenta años después del *Principia* se llegara a un enfoque universal a los sistemas dinámicos no fue una sorpresa para nadie, aceptándose este salto como "obvio". El mismo Euler escribió,

> "El fundamento... no es nada más que el conocido principio de la mecánica, du = pdt, siendo p el poder acelerador y u la velocidad... Pero hay que reflexionar un poco antes de poder darnos cuenta de que este principio asimismo es válido para cada movimiento parcial a que se considere reducido el movimiento real. Aún más, este lema comprende todos los principios que normalmente se utilizan para calcular el movimiento curvilíneo."

Puede que al estudiante moderno le resulte difícil comprender cómo hicieron falta 60 años de experiencia con problemas muy concretos para llegar a una conclusión tan sencilla, que hoy en día se enseña y es aceptada como cosa natural en todo curso de física elemental. No obstante, es muy dudoso que este mismo estudiante tenga un mayor dominio de los principios mecánicos que Newton o Euler. Nadie ponía en duda "la segunda ley de Newton", por lo menos como excelente regla para resolver problemas, pero lo que ninguno llegó a apreciar hasta que por fin resultó evidente fue que de entre todos los principios mecánicos utilizados entonces, éste era el único de carácter *general: Es aplicable a cualquier parte de un sistema arbitrario,*

Fig. 38. Leonhard Euler (1707-1783), retrato del año 1753, pintado por Emanuel Handmann, en el Kunstmuseum, Basilea

y es más, *basta para obtener las ecuaciones* que rigen el movimiento de un gran número de distintos sistemas. Mientras escribía su historia de la mecánica en 1788, Lagrange lo explicó así:

> "Pero si uno investiga el movimiento de varios cuerpos que reaccionan entre sí..., el problema que se plantea es de un orden superior, y los anteriores principios (es decir, aquellos conocidos antes de 1742) no bastan para su resolución."

El propio Euler no había alcanzado tanto en 1747. Cierto es que conseguía resultados satisfactorios para los sistemas discretos, pero todavía no había sido capaz de lograr un método general y unificado para los sólidos y los medios fluidos. Apoyándose en el método que siguiera para investigar la cuerda vibrante y algunos problemas de hidráulica, por fin, en 1750, vio que el principio del momento lineal era aplicable a *sistemas mecánicos de todo tipo,* bien discretos o bien continuos. Su estudio, titulado "Descubrimiento de un nuevo principio de la mecánica", fue publicado en 1752, nos ofrece las ecuaciones

$$F_x = Ma_x, \quad F_y = Ma_y, \quad F_z = Ma_z,$$

como los axiomas que "comprenden todas las leyes de la mecánica", y en los que la masa M puede ser bien finita o bien infinitesimal. Más adelante los llamaría "los primeros principios de la mecánica". He aquí, propuestas por primera vez como ecuaciones generales y explícitas para problemas mecánicos de cualquier tipo, las famosas "ecuaciones de Newton".

Parece tan fácil el descubrimiento de este principio a partir de las ideas newtonianas que todo el mundo da por hecho el que Newton fue su autor; tan poco se conoce la verdadera historia de la mecánica. Es un hecho innegable que hubieron de pasar 60 años de investigación fundada en métodos bastante más complicados, incluso para problemas relativamente sencillos antes de que se reconociera este "nuevo principio".

Los frutos del "nuevo principio" se cosecharon de inmediato. Ya en el mismo trabajo en el que Euler lo dió a luz se encuentran las ecuaciones del movimiento para un cuerpo rígido. Todavía hoy en día permanecen sin publicarse sus cuadernos de apuntes en los que encontramos las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que rigen pequeñas vibraciones transversales de una barra así como para varios otros sistemas flexibles, obtenidas con una facilidad sorprendente a partir de las ya de antiguo conocidas fórmulas de la fuerza restauradora.

Sin embargo, se equivocó al afirmar que este principio "contiene en sí mismo todos los principios que pudieran llevarnos al conocimiento del movimiento de todos los cuerpos, cualesquiera que sea su naturaleza". Como pronto veremos, le fue menester la experiencia acumulada a lo largo de casi toda su vida para darse cuenta que un segundo principio era necesario, y conseguir descubrirlo.

9. CUERPOS RIGIDOS Y LA DISTINCION ENTRE MASA E INERCIA

En 1750 no se comprendía de manera clara el movimiento más general de un cuerpo rígido, y eso que ya Huygens había resuelto correctamente el problema de la oscilación de un cuerpo rígido masivo que se mueve alrededor de un eje fijo, y que Jaime Bernoulli en 1703 había proporcionado un método más perfeccionado que sería más adelante germen de varios principios. El estado de cosas era tal que incluso

para el movimiento alrededor de un eje fijo, no eran capaces de calcular la reacción del cuerpo sobre su apoyo, no se conocía ninguna manera de determinar el comportamiento de una peonza en rotación.

Los "primeros principios" eulerianos supusieron un adelanto gigantesco. Como ya hemos dicho, junto con estos principios aparecieron también las *ecuaciones generales del movimiento de un cuerpo rígido* alrededor de su centro de gravedad, obtenidas mediante la aplicación de los "primeros principios" a los elementos de masa que componen el cuerpo, reemplazando al mismo tiempo la aceleración del elemento por su expresión en términos del *vector velocidad angular,* que sale aquí por primera vez. Basta entonces considerar momentos con respecto del centro de gravedad para, después de algunas simplificaciones, obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento conocidas como "ecuaciones de Euler" para un cuerpo rígido al que se aplica un cierto par respecto de su centro de masas. Durante este proceso, surgen de manera natural las seis componentes de lo que hoy en día llamamos "tensor de inercia". El "momento de inercia" ya se conocía desde hacía bastante tiempo, habiendo sido bautizado por Euler con este nombre. El trabajo al que nos estamos refiriendo comienza con una demostración de que para que un cuerpo gire libremente alrededor de un eje, además de pasar tal eje por el centro de gravedad, deben anularse los dos productos de inercia correspondientes: este resultado generaliza los descubiertos por Euler para láminas planas cinco años antes. Así queda claro que el ejemplo newtoniano de un cilindro en rotación no es más que un caso muy particular: la inercia, como expresión de la tendencia de los cuerpos a permanecer en movimiento, es apropiada para un movimiento de traslación pero sólo es aplicable a una clase muy restringida de rotaciones.

Segner demostró en 1755 que todo cuerpo rígido tiene por lo menos tres ejes de rotación libre, perpendiculares entre sí; vio además que para ciertos cuerpos era infinito el número de tales ejes. Entre los años 1758 y 1760 Euler revisó toda la teoría de los cuerpos rígidos. Comienza introduciento el cuerpo deformable más general, para el cual define el "centro de masa" o "centro de inercia", quizás distinto del centro de gravedad en caso de que éste exista, y afirmó que en cualquier cuerpo el centro de masas se desplaza igual que lo haría una masa puntual que ocupara su misma posición, poseyera la misma masa que el cuerpo, y estuviera sujeta a la misma fuerza resultante que actúe sobre el cuerpo. Para el cuerpo rígido precisó con gran claridad cómo la inercia, o resistencia al cambio en el estado de movimiento, queda determinada no por la masa sino por el *tensor de inercia,* cuyas propiedades analiza breve pero exhaustivamente. Toda esta materia sería investigada con mayor profundidad en su gran tratado de 1765 acerca de los cuerpos rígidos.

La distinción ya indicada por Newton entre los conceptos de masa y peso quedó así perfeccionada; al mismo tiempo se establece la diferencia entre inercia y masa, conceptos ambos que tan a menudo aparecían confundidos. La "segunda ley de Newton" es, pues, sólo aplicable a cuerpos infinitamente pequeños o a los centros de masa de cuerpos finitos.

10. Las vibraciones y los movimientos ondulatorios desde el punto de vista de las ecuaciones del movimiento

Tan pronto como se descubrieron las ecuaciones diferenciales del movimiento, se pudo desarrollar de manera unificada toda la teoría de las pequeñas vibraciones.

El primer trabajo moderno que estudia las vibraciones es el análisis debido a Euler (1748) sobre el movimiento de n masas iguales ligadas por resortes idénticos; todos los resultados que obtuvo también pueden interpretarse en términos de una cuerda tensa, sometida a una carga. Encontró la solución general expresada como una suma de n soluciones particulares, cada una de las cuales corresponde a un modo simple de vibración con una frecuencia bien determinada. Euler calculó explícitamente estas frecuencias y encontró los valores de las constantes arbitrarias para el caso en que sólo se desplaza inicialmente la masa de uno de los extremos.

Si bien D'Alembert (1746) obtuvo la solución de la ecuación diferencial en derivadas parciales para la cuerda vibrante, en términos de funciones arbitrarias, limitó enormemente su aplicabilidad al imponerla gran número de condiciones innecesarias. Estas condiciones fueron atacadas por Euler (1748) quien mantuvo que la ecuación diferencial en derivadas parciales proporcionaba por sí misma un enunciado completo del problema mecánico. Por su parte, entre 1734 y 1739, Daniel Bernoulli al estudiar diversos sistemas oscilantes había llegado a la conclusión de que era posible la superposición simultánea de pequeñas vibraciones, y en 1753 escribió un trabajo en el que afirma que el movimiento vibratorio más general que puede llevar a cabo un cuerpo arbitrario puede componerse mediante una superposición de modos simples de vibración. Como Bernoulli nunca quiso partir de las ecuaciones diferenciales del movimiento, una demostración matemática de esta proposición resultaba imposible, por lo que la consideró como una nueva ley de la física. Pero nunca le fue posible justificar esta hipótesis mediante la resolución de algunos problemas con condiciones iniciales, puesto que los teoremas de desarrollo en serie necesarios no serían descubiertos hasta el siglo siguiente. En 1759 Lagrange aporta a la controversia el cálculo de la solución explícita del problema de la cuerda cargada bajo condiciones iniciales, lo que supone una ligera generalización de los resultados obtenidos por Euler en 1748. También intentó llegar a la solución de la cuerda continua en términos de funciones arbitrarias haciendo uso de un paso al límite, pero, como indicó D'Alembert, el desarrollo es incorrecto. Por su parte, Lagrange pretendió refutar las hipótesis de Bernoulli pero también aquí se equivocó.

La verborrea a que esta polémica dió lugar contribuyó muy poco al desarrollo de la mecánica, pero fue la causa de que Euler estudiara en mayor profundidad la ecuación de ondas. Casi la totalidad de la teoría actual de la cuerda homogénea vibrante la construyó él directamente a partir de la solución funcional. En particular, demostró que las ondas se propagaban en ambos sentidos con una velocidad correspondiente al período fundamental, descubriendo también las leyes de reflexión en los puntos extremos. De rechazo, este estudio derrumbó la ley de continuidad de Leibniz y, al generalizar el uso de las "ecuaciones" (en el sentido de funciones analíticas) abrió el camino al concepto más general del movimiento ondulatorio.

Los modos simples de las barras y de otros sistemas oscilatorios son soluciones particulares, correspondientes a condiciones iniciales particulares impuestas a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales aplicables a cada caso. De esto se dió cuenta Euler, a pesar de no poder calcular las soluciones generales. Mediante el artificio de considerar a una membrana como una malla de fibras dedujo la ecuación diferencial en derivadas parciales que rige los pequeños desplazamientos de la membrana, y asimismo, calculó los modos simples y algunas frecuencias propias de membranas rectangulares y circulares. Sin embargo, sus teorías sobre las varillas curvadas fallan por falta de una geometría suficientemente desarrollada de la torsión de una curva. Esta falta de geometría diferencial, combinada con la equivocada idea de

Fig. 39. J. Le Rond D'Alembert (1717-1783), según un grabado publicado como portada del Tomo 2 de la tercera edición de la Encyclopédie de Diderot, 1778

D'Alembert de que una placa se puede considerar como un conjunto de varillas, fue lo que invalidó la teoría de las placas debida a Jaime Bernoulli II (1787), que había tenido su origen en la determinación experimental de las geometrías modales y frecuencias propias realizada por Chladni (1787).

11. El concepto de tension normal y los principios de la hidrodinamica

Como hemos visto, Juan Bernoulli fue el primero, en su *Hidráulica* (1739), en determinar el movimiento de un cuerpo deformable mediante el equilibrio de fuerzas. Sería erróneo suponer que esto fue una simple aplicación de principios newtonianos, pues Bernoulli observó que para que quedaran bien definidos estos principios había que aventurar alguna hipótesis sobre la acción del fluido sobre sí mismo. Tal vez guiándose por anteriores estudios de las catenarias generalizadas (llevados a cabo entre 1691 y 1692, publicados en 1743) donde había conseguido aislar satisfactoriamente las fuerzas que actúan sobre un elemento infinitesimal de una cuerda, conjeturó que, aislando un cilindro recto infinitesimal de fluido en el seno del mismo, la acción del resto del fluido es la de una presión perpendicular a las caras del cilindro, con una fuerza variable que es por sí misma una incógnita. Mediante esta abstracción, quedó introducido el concepto de *fuerza interna* en el campo de la hidráulica. No debe confundirse con la presión ejercida sobre una pared, idea debida a Daniel Bernoulli, ni con el peso de una columna de líquido en reposo que ya aparece en los trabajos antiguos, pues el nuevo concepto incluye a éstos dos como casos particulares. En su amplitud e importancia se le puede comparar con la idea de tensión de un cable flexible, pues a más de suponer un concepto básico de la mecánica, representa un gran avance teórico al conseguir discriminar entre presión y peso, reemplazando las nociones vagas de acción a distancia mediante una acción por contacto en el seno de un material. La *fuerza aceleradora resultante* actuando sobre la rodaja infinitesimal no es más que la diferencia entre las fuerzas internas que actúan sobre sus dos caras.

La exposición que diera Juan Bernoulli de las ideas anteriormente expuestas fue confusa, y se limitó a utilizarlas para generalizar de manera inmediata resultados obtenidos por su hijo. Euler se enfrentó con los problemas que planteaba la nueva hidráulica, comenzando por axiomatizarla y mostrando su aplicación a muchas situaciones de interés fundamental. Entre los años 1749-1752 consiguió determinar el flujo de fluidos en el interior de bombas y turbinas, calculó las reacciones de las máquinas, encontrando las condiciones suficientes para evitar cavitaciones en el seno de las mismas.

También D'Alembert había entrado en el terreno de la mecánica de fluidos, con la publicación en 1744 de un tratado que se ocupaba de los problemas que ya habían sido resueltos por Daniel Bernoulli. Este estudio, al igual que los trabajos efectuados por Juan Bernoulli y Euler se limita a considerar movimientos unidimensionales para los que se supone que la velocidad es uniforme al tomar secciones rectas por el tubo. El obstáculo con que tropiezan teorías de este tipo es que no pueden predecir las fuerzas ejercidas por los fluidos sobre cuerpos sumergidos en su seno, lo que fue causa de que la Academia de Berlín ofreciera un premio al mejor estudio de la resistencia de fluidos. El ensayo de D'Alembert, acabado en 1749, contiene el primer análisis de un *campo de velocidades* que permite a las partículas del fluido variar su

velocidad arbitrariamente de un punto a otro. Al negarse la Academia a conceder el premio, devolviendo los manuscritos y sugiriendo a los participantes que compararan sus resultados con medidas experimentales, D'Alembert se retiró airado, publicando independientemente su ensayo en 1752. Del mismo hay que resaltar también la obtención de la ecuación diferencial en derivadas parciales que expresa la conservación de masa dentro del fluido en movimiento, la condición de flujo potencial, y lo que hoy en día se conoce como condición de conservación para la vorticidad en flujos más generales, todo ello aplicado a algunos casos especiales, Y al igual que hacía en sus estudios de sistemas puntuales, D'Alembert evita, siempre que le es posible, el uso del concepto fuerza. Pero esto es muy difícil de llevar a cabo en hidrodinámica, y su valiente intento sólo se puede calificar de incompleto además de no estar muy claros ni el método ni los axiomas. Desde luego, resultaba imposible la comparación con medidas experimentales, cosa que por otra parte hubiera sido prematura, pues sabemos que los datos de que entonces disponían se referían a lo que hoy en día llamamos flujos turbulentos, y todavía habría de transcurrir un siglo para que éstos empezaran a ser medianamente comprendidos. Según la teoría de D'Alembert un obstáculo no sufre resistencia en el seno de un fluido en movimiento estacionario, lo que ya había sido demostrado por Euler en 1745. Este resultado daría lugar a una serie de equívocos durante los 150 años siguientes. Lo más importante de esta obra de D'Alembert no es su posible aplicabilidad a algún experimento en particular, sino la introdución de concepto de *teoría de campo* para el comportamiento de la materia.

Esta teoría la recogió Euler, quien la sistematizó, utilizándola para asentar las bases de la hidrodinámica entre los años 1752 y 1759. Otro importante avance teórico que se encuentra en los estudios hidráulicos de Euler es la distinción entre los aspectos *cinemáticos* y *dinámicos* del movimiento de fluidos, distinción ya insinuada en la *Hidráulica* de Juan Bernoulli, y que adquiere gran importancia en la teoría del campo tridimensional. De hecho Euler llegó a construír una descripción matemática perfectamente clara y definida para algunos aspectos de deformaciones en cuerpos continuos, lo que dió lugar a un entendimiento más profundo de la idea de *conservación de la masa,* independientemente de cambios de forma o volumen.

Dentro de la teoría de cuerpos deformables cabe destacar como mayor éxito de Euler sus progresos en la construcción de una teoría de esfuerzos. En sus primeras investigaciones de hidrostática (1738, publicadas 1749), había hecho notar que para fluidos incompresibles en reposo con respecto de la superficie de la tierra, bastaba el único axioma de que la presión del fluido es normal a la superficie sobre la cual actúa, siendo su valor independiente de la geometría y orientación de dicha superficie, para obtener cualquier resultado apetecido. Estas investigaciones se habían originado en una conjetura debida a Juan Bernoulli: la de que un fluido, incluso estando en movimiento, ejerce una presión normal sobre sí misma, si bien admitiendo que esto sólo se cumple para ciertos volúmenes elementales de fluido y algunos tipos de flujo. Pero Euler además tuvo la intuición de integrar todas estas ideas definitivamente, creando así el concepto más general de *presión interna,* según el cual la fuerza ejercida por un fluido sobre cualquier superficie frontera imaginaria en el seno del mismo es equipolente a la acción de un *campo de presiones normales a la superficie,* cualesquiera que sean su geometría y la posición que ocupe dentro del fluido.

Esta idea es más sencilla que las que la precedieron, pero como sucede a menudo con las ideas sencillas, al principio pareció demasiado abstracta por lo que tardó en

ser comprendida. Hoy en día se enseña esta idea a los estudiantes como si fuera obvia. Ahora bien, no puede ser tan evidente cuando ciertas teorías más recientes que intentan describir el comportamiento de los fluidos han demostrado que no siempre es válida. El propio Euler se dió cuenta de inmediato de que su enunciado de la teoría era de tal generalidad que incluía todas las ideas que hasta entonces habían sido aplicadas en mecánica de fluidos, dejándolas anticuadas. Como él mismo escribiera:

"Esta generalización que concibo, lejos de oscurecer la realidad, por el contrario nos revelará las leyes de la naturaleza en todo su esplendor, dándonos una razón más para maravillarnos ante su belleza y sencillez."

Jamás se había llegado en la mecánica a una generalización de tal calibre. Incluso Lagrange, al final de su vida, admitió la grandeza de este hallazgo:

"Mediante este descubrimiento, la totalidad de la mecánica de fluidos quedó reducida a un problema de análisis, con lo cual si las ecuaciones que lo describen fueran integrables, se podría determinar por completo los detalles del movimiento y de la acción de un fluido movido por fuerzas arbitrarias. Desgraciadamente han resultado ser tan intratables que hasta la fecha sólo han podido resolverse para algunos casos muy sencillos."

Sin embargo, le sucedió a Euler lo mismo que antes a D'Alembert: a pesar de sus numerosos y brillantes estudios, no fue capaz de obtener de sus ecuaciones ningún resultado nuevo adecuado para la comparación con datos experimentales. Así pues, para el positivista, estas investigaciones hidrodinámicas suyas están mal concebidas y fueron infructuosas: en efecto, sus hipótesis básicas no pueden cimentarse experimentalmente, ni pudo Euler obtener de ellas números que puedan ser leídos en un instrumento de medida. Aunque sea así, lo cierto es que, después de la muerte de Euler, han sido las soluciones particulares de sus ecuaciones las que nos han dado teorías que describen el comportamiento de las mareas, de los vientos, de los barcos, y de los aeroplanos, encontrándose de continuo nuevas aplicaciones.

Quizás la raíz del éxito de Euler en una materia que ofrece tantas dificultades se encuentre en su *análisis de los conceptos.* Tras múltiples ensayos, y después de haber adoptado varias veces criterios semiempíricos en concordancia con las medidas experimentales de que disponía, Euler llegó a la conclusión de que había que olvidar momentáneamente la correlación experimental. Esta medida está plenamente justificada, pues cualquier experimento en este campo contiene fenómenos complejos demasiado difíciles de analizar por aquel entonces; incluso en la actualidad, varios siguen sin entenderse. Ahora bien, por el mero hecho de haber creado un modelo de *campo sencillo* para fluidos, definido mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, Euler abrió todo un nuevo terreno en las ciencias físicas. Y muchos científicos nos esforzamos todavía en desbrozar y ampliar este campo. Esta gran visión, que exigió "mirar" en el interior de un fluido en movimiento allá donde ni el ojo ni el experimento pueden llegar, usó de aquellas cualidades que Swift decía no poder encontrar ni en la música ni en las matemáticas: imaginación, fantasía, e invención.

12. Las leyes de la elasticidad y el concepto de tension de cizalladura

Los estudios de elasticidad, si descontamos las investigaciones que se realizaban

sobre el problema de las oscilaciones pequeñas, estaban restringidos a considerar deformaciones estáticas, por lo que no se vieron afectados por la gran revisión de los principios dinámicos ocurrida a mitad del Siglo XVIII. Cuatro grandes problemas conceptuales se derivaron de la obra de Jaime Bernoulli: (1) obtener la ley de flexión para una banda elástica a partir de la ley de distensión de las fibras longitudinales, (2) determinar la situación en una viga doblada y la naturaleza de las fuerzas que actúan sobre una sección recta arbitraria, (3) unificar la teoría de los cables flexibles, basada en el equilibrio de fuerzas, con la de las bandas elásticas, fundamentada en el equilibrio de momentos, (4) especificar la respuesta elástica de los materiales.

El primero y cuarto problemas los resolvió Euler de una manera casi casual en un sorprendente opúsculo sobre campanas escrito cuando era alumno de Juan Bernoulli en Basilea (1727). Desgraciadamente, por ser su tema principal una teoría incorrecta de las oscilaciones en varillas curvadas, quedó sin publicar durante casi 150 años. Comienza bajo la hipótesis de que, para una viga de geometría arbitraria, hay una variación lineal de las tensiones sobre la sección recta. Más adelante, integra para obtener el momento total de flexión, unificando así el método de Leibniz, que no tomaba en cuenta la flexión, con el de Jaime Bernoulli, en el que no se consideraba adecuadamente la variación de la tensión. El resultado es la conocida ley de Bernoulli-Euler, que expresa el momento de flexión como producto del así llamado módulo de Young por el momento de inercia y por el incremento de curvatura. De este enunciado se sigue que Euler tuviera que introducir el *módulo de extensión,* hoy día asociado con el nombre de Young[6], que caracteriza un material elástico y no una muestra particular del mismo.

Estas ideas fueron sistematizadas y aclaradas posteriormente por el mismo Euler en una serie de trabajos publicados entre los años 1760 y 1780. Cabe destacar su definición explícita del módulo de extensión, que hasta entonces solamente lo había mencionado de pasada. A esta definición siguieron de inmediato las leyes de proporción para la dependencia de las frecuencias de vibración con la forma de las secciones rectas, tema que había motivado algunas polémicas.

Era sabido el hecho de que una columna comprimida bajo una carga normalmente se dobla antes de romperse, pero no se había investigado más detalladamente este fenómeno hasta que Musschenbroek (1729) llevó a cabo su gran programa experimental sobre resistencia de materiales. Musschenbroek encontró que la resistencia a la rotura es inversamente proporcional al cuadrado de la longitud de la columna; también anunció haber observado una dependencia con la anchura y el espesor que puede ser correcta para el caso de ruptura, pero no para el de pandeo, esto es, de la flexión lateral elástica que lo precede. La determinación rigurosa, debida a Euler, de todas las geometrías obtenibles por deformación finita de una banda recta o circular sometida a carga máxima es el logro más impresionante de la teoría de elasticidad de su siglo, aunque sólo ayudara a sentar los principios de esta disciplina mediante su hallazgo casual de la fórmula para la flexión lateral (1743). Sus resultados confirmaron la regla experimental de Musschenbroek en cuanto a la dependencia con la longitud de la columna y, aún más, cuando se relaciona correctamente el módulo de flexión con

---

[6] Como es bien sabido, el módulo introducido por Young (1807) no goza de esta independencia y no equivale al moderno "módulo de Young", siendo la constante de proporcionalidad entre fuerza y deformación, la cual estaba en uso generalizado durante todo el siglo anterior a la obra de Young.

el módulo de elasticidad, el resultado euleriano da también la dependencia correcta con la geometría de la sección recta. En 1770, Lagrange observó que existía una sucesión infinita de cargas de pandeo para cada una de las cuales resultaba posible una geometría de flexión adicional, pero no hizo ninguna conjetura sobre la forma que ésta en realidad tomaba. Además intentó hallar la geometría más resistente para una columna de tamaño dado, pero su análisis es erróneo (1773). El cálculo debido a Euler de la altura necesaria para que se doble una columna uniformemente pesada (1776, 1778) es un *tour-de-force* de análisis y mecánica, pero no profundiza en los conceptos básicos. Euler encontró también que una tensión igual a la carga de pandeo en la compresión de una varilla de madera produciría, caso de invertirse, una deformación de tan sólo 0,07 %. A partir de aquí empieza a apreciarse el hecho de que grandes cargas puede que tan sólo produzcan deformaciones elásticas minúsculas. Si miramos hacia atrás veremos que todas las investigaciones anteriores a las que acabamos de mencionar, no se dieron cuenta de que grandes deformaciones no estaban necesariamente ligadas a grandes flexiones.

A Parent (1713) se deben unos extensos comentarios y correcciones al análisis de Juan Bernoulli acerca de la fibra neutra, pues él fue el primero en comprender la manera de aplicar la condición de equilibrio de fuerzas junto con la de momentos a los procesos que se dan en la sección recta de una viga. Admitiendo distintos módulos de compresión y extensión, demostró que habían de ser iguales las áreas comprendidas bajo las curvas que representan las tensiones y compresiones. Mediante esta condición queda restringida la situación de la fibra neutra, pues de ella se sigue que, para una relación lineal y continua, la fibra neutra ha de ser la central. También admitió la posibilidad de la existencia de fuerzas tangenciales a la sección recta, que corresponderían a lo que hoy llamamos tensión de cizalladura. Cosa curiosa, Euler creyó que la fibra neutra se encontraba sobre la superficie cóncava de la viga, pero este error en el que persistió a lo largo de su vida, no afectó para nada sus resultados acerca de curvas elásticas y flexión lateral, pues nunca los particularizó lo suficiente como para introducir este dato. Juan Bernoulli III parece que entendió hasta cierto punto el problema de la fibra neutra (1776), pero el primer avance real con respecto a los estudios de Parent lo llevó a cabo Coulomb (1773), quien enunció todas las condiciones de equilibrio de las fuerzas que actúan sobre la sección recta de una viga cargada. De hecho, casi todo lo que dedujo se basaba en hipótesis acerca de la tensión de cizalladura, cuya existencia ya la había demostrado con anterioridad. Mientras que Galileo había asociado al proceso de ruptura con una tensión dada, y Mariotte con un alargamiento dado, Coulomb tomó como criterio de ruptura una tensión de cizalladura de magnitud conocida. Asimismo, demostró que la mayor tensión de cizalladura en un proceso de compresión aparecía según planos inclinados a un ángulo de 45 grados con respecto a la línea de acción de carga.

La gran obra de Parent y Coulomb no llegó a constituír una teoría de la elasticidad. Nada tiene en común con los análisis más sofisticados de Jaime Bernoulli y Euler, pareciéndose más bien a los estudios de Galileo y Leibniz en cuanto que resultaba una teoría puramente estática, que despreciaba las deformaciones, siendo su formalismo matemático demasiado primitivo para mayores desarrollos teóricos.

Antes de publicarse el trabajo de Coulomb, Euler ya había dado fin a una investigación complementaria. En uno de los primeros trabajos (1728-1730) que iniciaron esta investigación, había logrado mediante el método de momentos una única ecuación válida tanto para el cable flexible como para una banda elástica bajo flexión. Poco más tarde, aparece un trabajo de Jaime Bernoulli en el que quedaba clara la

aplicabilidad, para el caso de un cable perfectamente flexible, de cualquiera de los métodos generales que hasta entonces se conocían, pues todos ellos daban el mismo resultado. Para las bandas esto no parecía ser cierto, por lo que Euler intentó durante gran parte de su vida unificar la teoría de la banda elástica con la del cable flexible, en especial en lo concerniente al equilibrio de fuerzas. Por fín vió en 1771 que lo que faltaba era el concepto de fuerza ejercida por un elemento de una fibra genérica sobre su vecina. Aquí, además de la tensión que se presenta en el caso del cable perfectamente flexible, hay también una fuerza normal o *resultante de cizalladura.* Sólo se puede aplicar la condición de equilibrio de fuerzas si se toma esto en cuenta. Este descubrimiento tuvo tres grandes repercusiones: 1) Al ampliar las ideas de Jaime Bernoulli, Euler separó los principios generales de la mecánica de las ecuaciones constitutivas para materiales. Sus *ecuaciones generales del equilibrio* para una línea cualquiera deformable en un plano, son, después de sus "primeros principios", el primer ejemplo de una ley general de la mecánica, por completo independiente de conceptos definidores de fluidos, cuerpos flexibles, cuerpos elásticos, etc., y por tanto, universalmente válida. 2) Aparece el *vector tensión de fibra,* precursor inmediato del tensor de tensión, que tan sólo se encuentra restringido en magnitud y dirección por las condiciones de equilibrio. Hay que distinguir este vector de la acción puramente tangencial que aparece en el cable flexible, y de la presión normal que surge en la hidrodinámica de Euler, aunque sí es análogo a la tensión de cizalladura que poco más adelante introduciría Coulomb. 3) Dejó claramente establecida la *independencia* entre equilibrio de momentos y equilibrio de fuerzas. Esta independencia, que a menudo queda oculta en el formalismo de mecánica analítica, es esencial para el desarrollo de la mecánica de continuos, como veremos en el próximo apartado.

En 1774 Euler llegó a la conclusión de que en un proceso de torsión, el par era proporcional al seno del ángulo girado, pero, por estar ocupado con la teoría de las placas, no hizo uso de este dato. Por su parte Coulomb llevó entre 1777 y 1784 una larga serie de experimentos de torsión en hilos de seda y alambres metálicos, a partir de los cuales encontró que el par era proporcional al ángulo girado si el ángulo era pequeño. Entre sus notas, encontramos el comentario de que las tensiones grandes cambian el módulo de torsión antes de destruír la linealidad de la respuesta. Resulta curioso, pues, que Coulomb no intentara construir ninguna teoría de la torsión.

Aunque ya para 1773 habían ido apareciendo todas las ideas necesarias para una teoría general del esfuerzo, todavía faltaba el otro elemento esencial para construir una teoría completa de la elasticidad, a saber, la teoría de las deformaciones. Ni siquiera aparecía en los estudios de elasticidad de por aquel entonces. Y sin embargo, en el contexto completamente distinto de la mecánica de los fluidos perfectos, Euler ya había introducido (1766) e interpretado el tensor de velocidad de deformación o de dilatación. Tan sólo faltaba un ligero cambio en la nomenclatura para obtener la misma descripción de deformación infinitesimal que más tarde construyera Cauchy, pero este detalle pasó inadvertido.

13. El principio del momento de la cantidad de movimiento

En la estática el equilibrio de fuerzas no implica el equilibrio de momentos, ni el de momentos el de fuerzas. En la dinámica, el principio del momento de la cantidad de movimiento se desarrolló muy tardíamente y los primeros trabajos que estu-

diaron este concepto dan la impresión de que ambos principios debían ser de alguna manera equivalentes de modo que resultara una única ley de movimiento. Esta ilusión sigue siendo fomentada por los físicos que se dedican a la enseñanza de la mecánica hoy en día.

Recordemos que la solución debida a Huygens para el péndulo físico no utiliza para nada el principio de la cantidad de movimiento. Desarrollando una idea ya latente en el célebre estudio de 1703 de Jaime Bernoulli, tanto Euler como Daniel Bernoulli se basaron a menudo en este principio en sus primeros trabajos sobre sistemas rígidos, articulados, o flexibles, aunque bien es verdad que suele quedar disfrazado por una hipótesis cuasiestática adicional. Este principio fue cobrando importancia con gran lentitud, por lo que resulta muy difícil dar la fecha exacta en que alcanzó el status de "principio de la mecánica". A mí me parece 1751 la fecha más correcta, ya que éste fue el año de la publicación del trabajo de Euler de 1744, del que ya hemos comentado que fue el primero en que se tomaron las "ecuaciones de Newton" como suficientes para proporcionar todos los principios mecánicos que determinan el movimiento de un sistema complejo, siendo el caso estudiado el de un alambre tenso baja carga. La segunda parte de este trabajo obtiene las ecuaciones del movimiento para un sistema de n varillas rígidas conectadas entre sí y sujetas a fuerzas arbitrarias en las articulaciones. Aquí no bastan las ecuaciones newtonianas. Euler las suplementa con un principio independiente: el equilibrio del momento de la cantidad de movimiento respecto del centro de masa de cada varilla.

El desarrollo que hizo Euler del concepto de inercia de rotación ya ha sido mencionado en §-9, donde fue descrito su primer método para derivar las ecuaciones del movimiento de un cuerpo rígido; ahora bien, no llegó a una distinción precisa entre los aspectos cinemáticos y dinámicos del problema. Más tarde buscó un enfoque más general de la mecánica que permitiera obtener directa y fácilmente las ecuaciones del movimiento de un cuerpo rígido como caso particular. Los resultados de esta búsqueda aparecen en una memoria publicada en 1776, en la que enunció las siguientes leyes *aplicables a todas las partes de un cuerpo arbitrario,* ya sea puntual o no, rígido o deformable:

Ley 1. La fuerza total que actúa sobre el cuerpo es igual a la variación temporal de la cantidad de movimiento total.

Ley 2. El par total que actúa sobre el cuerpo es igual a la variación temporal del total del momento de la cantidad de movimiento, donde tanto el par como el momento se toman con respecto del mismo punto fijo.

Estas leyes, que bien pudieran llamarse *leyes eulerianas de la mecánica,* implican, no sólo las "leyes de Newton" para masas puntuales, sino también todos los demás principios de la mecánica clásica y resultan igualmente aplicables a cuerpos continuos como a sistemas discretos. La primera ley es equivalente a los "primeros principios" de Euler (1750) y da lugar al teorema general del centro de masa. La segunda ley se sigue de la primera en algunos casos; por ejemplo, esto sucede si todas las fuerzas son funciones continuas de la masa y si todos los pares son momentos de fuerzas. Pero en sistemas más complejos, como por ejemplo, aquellos en los que aparece un esfuerzo cortante, la segunda ley es independiente de la primera. Para un cuerpo rígido, Euler obtuvo de nuevo directamente de la segunda ley sus ecuaciones del movimiento.

La dificultad de concepto que presenta la ley del momento de la cantidad de movimiento da lugar a menudo a falsas interpretaciones[7].

14. LA INVARIANCIA DE LAS LEYES DE LA MECANICA Y LA *Méchanique Analitique* DE LAGRANGE (1788)

Hoy en día el "principio de invariancia de Galileo" es bien conocido, pero durante el siglo XVIII se presenta más como intuición que como afirmación explícita. El descubrimiento de las propiedades de invariancia en la mecánica nació del estudio de problemas concretos más que de formulaciones generales. Por los años de 1740, Daniel Bernoulli, Euler, y Clairaut se plantearon algunos problemas de gran dificultad, como fueron por ejemplo, el de determinar el movimiento de una masa puntual que desciende por una cuña, la cual a su vez, se desliza sobre una mesa, o el de una masa puntual que se mueve dentro de un tubo alabeado y rígido dotado de un movimiento inicial arbitrario, Clairaut expuso, con gran claridad en un trabajo publicado en 1745, el principio necesario para resolver este tipo de problemas: no es más que lo que hoy conocemos por principio del movimiento relativo, según el cual un cuerpo observado desde un sistema de referencia no inercial experimenta una "fuerza aparente" que es igual a la aceleración, cambiado de signo, de dicho sistema de coordenadas respecto a un sistema inercial. Sin embargo, en algunos de los problemas que investigó, no calculó correctamente la aceleración relativa.

Euler adoptó este mismo principio, lo enunció con mayor precisión, y gracias a él pudo calcular las soluciones correctas para varios problemas extremadamente difíciles. En particular, durante sus investigaciones sobre máquinas hidráulicas, descubrió lo que hoy llamamos "aceleración de Coriolis", expresada en función de las oportunas variables angulares. En un posterior intento de calcular dicha aceleración,

---

[7] En los textos de mecánica para físicos, se suele deducir esta ley de las "leyes de Newton" aplicadas a elementos de masa que se suponen atraídos entre sí por fuerzas centrales equilibradas dos a dos. Aunque los pasos formales de esta derivación son válidos, el resultado que se obtiene es demasiado restringido para ser aplicable a la mecánica de los medios continuos a más de metodológicamente incorrecto para mecánica de cuerpos rígidos:

1. Por definición, ninguna de las fuerzas entre las partículas componentes de un cuerpo rígido interviene en el movimiento de éste. La condición de rigidez aplicada a la segunda ley de Euler basta para determinar el movimiento. La hipótesis de fuerzas mutuas da lugar a causas superfluas que después han de ser eliminadas mediante la navaja de Ockam.
2. La introducción de fuerzas mutuas en el estudio de los cuerpos rígidos lleva consigo el concepto, en este caso innecesario, de acción-a-distancia.
3. En mecánica de medios continuos la fuerza total que actúa sobre un cuerpo finito se origina principalmente en el tensor de refuerzos, que representa la interacción contigua entre materiales. No existe ninguna razón de índole física para suponer que las fuerzas se deben únicamente a interacciones no locales, ni tiene esta hipótesis gran utilidad. Si la mecánica de los cuerpos rígidos se estudia como un caso particular de la mecánica de los medios continuos, el esfuerzo de cizalladura en el seno del cuerpo rígido queda indeterminado y nunca aparece explícitamente; pero la segunda ley de Euler sigue siendo aplicable.

En ninguna de las obras de Euler ni en las de los demás geómetras del siglo XVIII se estudian los cuerpos rígidos postulando fuerzas no locales, como se hace en los libros modernos. Para descubrir sus ecuaciones, Euler razonó que, puesto que un cuerpo no se pone en movimiento espontáneamente, las fuerzas entre sus partículas "se destruyen mutuamente entre sí" y por tanto estaba justificado despreciarlas en el cálculo del par; obtiene la respuesta correcta si bien el razonamiento es dudoso. En su estudio definitivo de los cuerpos rígidos no hace ninguna hipótesis ni restricción acerca de la presencia o naturaleza de fuerzas internas.

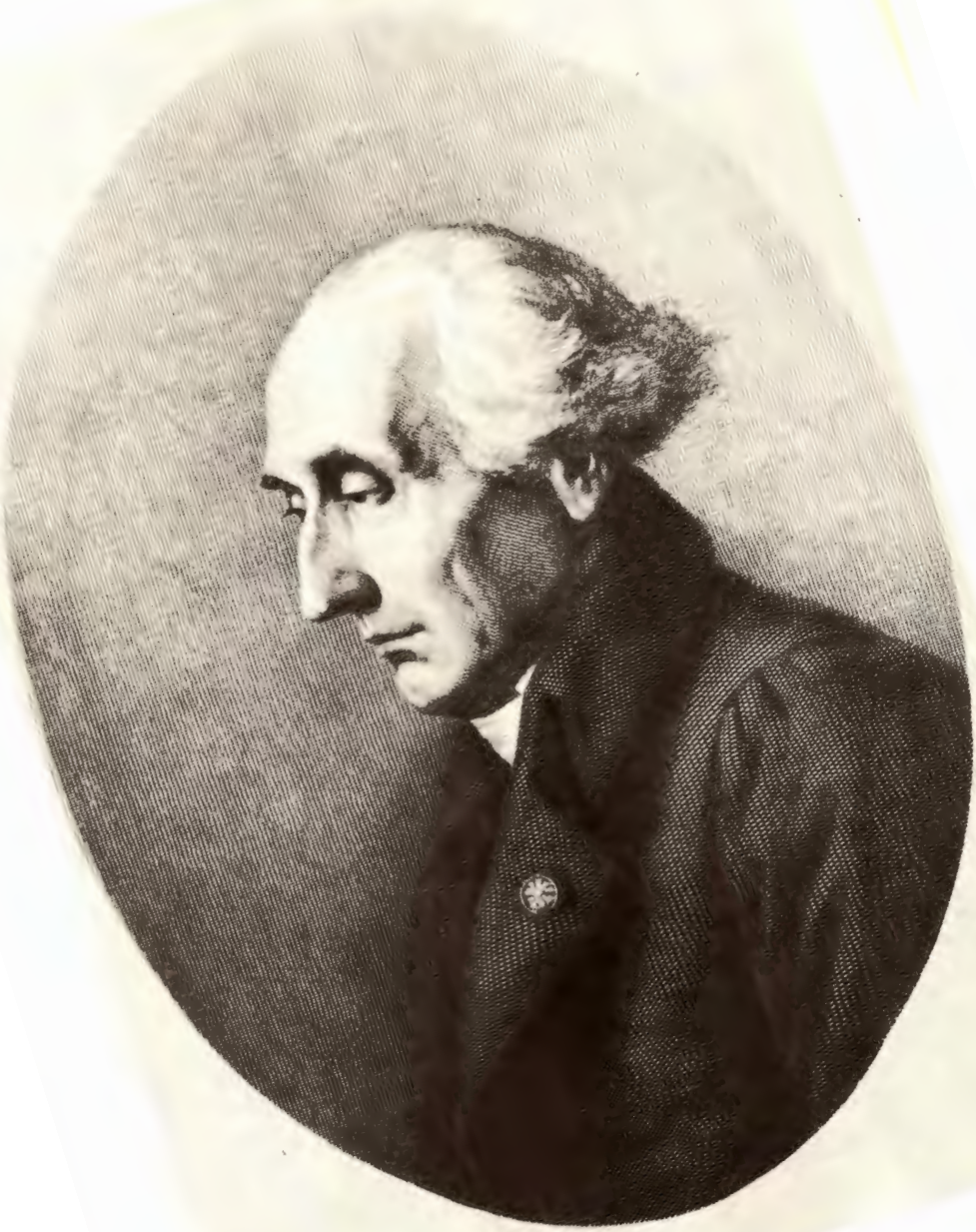


Fig. 40. J. L. Lagrange (1736-1813)

para un movimiento arbitrario, en coordenadas cartesianas rectangulares se equivocó por un factor de 1/2 en la solución final (1755).

Daniel Bernoulli introduce en 1739 una función potencial particular relacionada con el estudio de la banda elástica. Jacobo Riccati (c. 1754) llegó a sugerir que el trabajo efectuado en la deformación de un cuerpo elástico quedaba, por lo menos en parte, disponible para recuperar la deformación al ser suprimidas las fuerzas; desgraciadamente no dió ninguna expresión matemática de esta importante idea. En 1743 Euler demostró que el principio de mínima energía potencial debido a Daniel Bernoulli llevaba a la ecuación de la curva elástica, aun sin ser equivalente al principio de conservación de la energía.

Dos principios propuestos por Maupertuis como enunciados generales de las leyes de la mecánica atrajeron gran interés ya que constituían proposiciones únicas e invariantes acerca de la totalidad de un sistema sin necesidad de descomponer en sus partes. La *ley estática del reposo* (1740) no es más que una generalización del antiguo principio de que el centro de gravedad tiende a descender hasta la menor altura posible; ya conocida por los clásicos, esta ley había sido empleada por Jaime Bernoulli para conseguir la solución del problema de la catenaria. También introdujo Maupertuis potenciales correspondientes a fuerzas centrales que varían según la potencia n-ésima de la distancia. Su *principio dinámico de mínima acción* considera la "acción" de un cuerpo en movimiento como la integral de la cantidad de movimiento con respecto a la distancia a lo largo de la trayectoria y afirma que la Naturaleza procura ser lo más económica posible a la hora de suministrar esta magnitud[8].

Deseaba imitar e incluir el principio de Fermat de la óptica, y aunque llegó a deducir ciertos resultados sencillos a partir de su principio, no tenía la talla matemática como para generalizarlo o llegar a alguna conclusión fundamental gracias al mismo; además, su formulación deja mucho que desear en cuanto claridad y corrección.

Trabajando independientemente, Euler encontró otra aplicación particular del principio de mínima acción (1743). Su enunciado es claro y comprensible, además de limitar las trayectorias posibles a aquellas compatibles con la misma energía total. A lo largo de investigaciones realizadas en 1748 consiguió generalizar la ley del reposo (que hoy conocemos bajo el nombre de "principio de Dirichlet"). Como ejemplo, demostró la manera de calcular el trabajo realizado por un par, haciendo así posible el uso de este principio para el problema de una banda elástica sometida a una distribución de cargas.

El primer enunciado formal y suficientemente general del principio de mínima acción para sistemas de masas puntuales se debe a Lagrange (1761), aunque bien es verdad que carece de las necesarias hipótesis restrictivas. Por vez primera aparece una proposición satisfactoria acerca de las leyes de una rama extensa de la mecánica sin el uso a priori del concepto de fuerza. Simultáneamente, Lagrange consigue, en sus estudios acerca de sistemas continuos, obtener diversos principios variacionales de distinto alcance, bien que mediante manipulaciones puramente formales. En estos estudios aparecen funciones potenciales, pero Lagrange no explica nunca los conceptos, contentándose con verificar el formalismo. [El potencial de velocidades de la

---

[8] Una idea similar a ésta ya había sido expresada por Leibniz. Para una revisión de la controversia sobre el principio de mínima acción, véase J. O. Fleckenstein, Introducción a L. Euleri *Opera Omnia* (2) 5.

hidrodinámica y la ecuación en derivadas parciales que satisface ("ecuación de Laplace") ya habían sido deducidos por Euler en sus trabajos hidrodinámicos (1752), y el potencial gravitatorio "newtoniano" había de aparecer por vez primera en un trabajo de Lagrange (1799).]

En la *Méchanique Analitique* (1788) se encuentra por fin un principio variacional válido para la mayoría de los sistemas mecánicos entonces conocidos. Su expresión analítica, llamada "principio de D'Alembert" en casi todos los libros modernos, formula el *principio de los trabajos virtuales,* añadiendo a las fuerzas aplicadas "fuerzas inerciales" con origen en las aceleraciones y bajo el supuesto de que las ligaduras no producen trabajo. Para sistemas de masas puntuales, ya en 1782 Lagrange había implantado las "coordenadas generalizadas", llegando a la formulación invariante de la dinámica analítica conocida bajo el nombre de "ecuaciones de Lagrange" gracias a la cual su tratado ha alcanzado tanta fama.

Mucho se han elogiado estas ecuaciones, que pertenecen a la única parte de la mecánica del siglo XVIII relativamente bien conocida en la actualidad. Es evidente el importante papel que desempeñaron en el desarrollo posterior de la mecánica analítica y en la física moderna. Lo que ya no resulta tan claro es el hecho de que lo abstracto del formalismo tiende a ocultar los principales problemas conceptuales de la mecánica: La idea de sistemas inerciales de referencia y la noción de rigidez, ambas esenciales a la imagen clásica de "observador", quedan veladas por la invariancia del álgebra.

Bien es verdad que las ecuaciones de Lagrange conservan la misma forma para todos los observadores, pero no es cierto que un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma de Lagrange haya de corresponder necesariamente a un sistema dinámico que satisfaga las leyes de Euler en un cierto sistema de referencia, menos aún en uno inercial. Al difuminar las fuerzas, las ecuaciones de Lagrange ocultan el grupo de invariancia de la mecánica clásica que, sin embargo, resalta de inmediato en las ecuaciones de Euler[9]. Es más, las ecuaciones de Lagrange no reflejan la geometría espacio-temporal de la mecánica clásica, cuya propiedad fundamental es la posibilidad de sumar entre sí vectores localizados en distintos puntos. Sin este lejano paralelismo podemos hablar de energía, pero nos resulta imposible construir las restantes magnitudes básicas de la mecánica clásica: cantidad de movimiento, centro de masa, y momento de la cantidad de movimiento. Viendo las ecuaciones de Lagrange, no se sabe si un sistema posee cantidad de movimiento o no; en cambio, las ecuaciones de Euler muestran de inmediato que sí lo posee, y esto viene confirmado por el hecho de que las integrales generales del momento lineal aparecieron por primera vez en estudios basados en la formulación euleriana. En todo caso, las ecuaciones de Lagrange tan sólo son relevantes a ciertos tipos de sistemas mecánicos y son mucho menos generales que su propio principio de los trabajos virtuales o que las leyes de Euler.

La *Méchanique Analitique* bien merece una breve apostilla. El propio autor describe así el propósito de su obra:

---

9 *Nota añadida para la reimpresión.* De hecho, el que haya *dos* leyes básicas es una consecuencia del teorema de que todo automorfismo del espacio euclídeo puede descomponerse en una traslación y una rotación. *Cf.* el trabajo fundamental de W. Noll, "La mecánique classique, basée sur un axiome d'objetivité", *La Méthode Axiomatique...* (1959), París, Gauthier-Villars, 1963.

"Ya existen diversos tratados de mecánica, pero el programa de éste es completamente nuevo. Me he planteado la tarea de reducir tanto la teoría como el arte de resolver los problemas concernientes a esta ciencia a fórmulas generales cuya simple aplicación dé todas las ecuaciones necesarias para obtener la solución de cada problema."

Su método es puramente algebraico:

"No se encontrarán figuras en esta obra. Los métodos que aquí expongo no requieren ni imágenes ni razonamientos geométricos o mecánicos, sino tan sólo operaciones algebraicas sujetas a un progreso regular y uniforme."

Al igual que la primera parte del Libro I del *Principia* de Newton, es mayormente una obra retrospectiva que organiza una serie de descubrimientos debidos a las generaciones inmediatamente anteriores dentro de un único esquema formal. Los resultados expuestos generalizan ligeramente algunos de los ya obtenidos por Euler, aunque expresados en el estilo rígidamente formal de Lagrange. A diferencia del Libro I del *Principia,* la *Méchanique Analitique* no contiene ningún descubrimiento fundamental aunque parte de ella está basada en trabajos anteriores originales del propio Lagrange. No encontramos en esta obra nada que pueda corresponder a los Libros II y III del *Principia,* esto es, nada que mire hacia el futuro en vez de contemplar el pasado y desde luego, no contiene comparación alguna entre resultados teóricos y valores experimentales. La imagen que presenta de la mecánica es la de una disciplina cerrada: una rama de la teoría de las ecuaciones diferenciales.

Al final del siglo XVIII existía la lamentable tendencia de huír de los problemas básicos de concepto, tanto en mecánica como en análisis matemático. La propensión formalística, tan contraria a la gran tradición iniciada por Jaime Bernoulli y Euler, se extendió rápidamente por la escuela francesa y, por supuesto, se refleja en la *Méchanique Analitique.* La renuencia de historiadores y físicos a mirar más allá de la *Méchanique Analitique* y a reconsiderar la gran obra de Euler y de los Bernoulli es culpable de muchos juicios erróneos acerca de la producción científica del siglo XVIII. El tratado de Lagrange, como su título implica, no se ocupa de la mecánica racional; se debe considerar como una monografía sobre uno de los posibles métodos de deducir ecuaciones del movimiento, prácticamente restringida a la rama que hoy denominamos mecánica analítica. Puede que esto disculpe el que la obra no incluya ninguna solución particular para la cuerda vibrante[10], los tonos y nodos de varillas y membranas, la geometría de las curvas elásticas, el flujo de fluidos en tubos, *etc.;* o que no mencione conceptos tan fundamentales como son movimiento relativo, esfuerzo, deformación, módulo de elasticidad, fibra neutra, equilibrio inestable, propagación de ondas, *etc.* Y sin embargo, todas estas soluciones y todos estos conceptos se encuentran en la bibliografía de la generación anterior a Lagrange.

Una vez puestas en claro las limitaciones de la obra de Lagrange, su evaluación es cuestión de gustos. ¿No cambiaron en el siglo pasado los gustos literarios, pictóricos y musicales? ¿Por qué no han de cambiar los gustos "mecánicos"? Pues aunque los historiadores se deleiten en citar la alabanza que Hamilton hiciera de la *Méchanique Analitique,* describiéndola como "en cierto modo un poema científico", ¿cuántas personas comparten actualmente los gustos poéticos de Hamilton?

---

[10] En la segunda edición ya se aborda este tema.

15. RECAPITULACION: EXPERIENCIA, TEORIA Y EXPERIMENTO DURANTE LA ILUSTRACION

Centenares de trabajos y tratados matemáticos recogen esta gigantesca búsqueda tras los fines, métodos, y resultados de la física matemática, búsqueda hasta la fecha inigualada. He intentado explorar lo más concienzudamente esta inmensa bibliografía para poder esbozar el sentido que se le dió a la mecánica durante la Ilustración. Pero el físico moderno se preguntará, ¿cuáles fueron los experimentos fundamentales sobre los que se basó la mecánica "clásica"?

Nunca he podido encontrar "experimento fundamental" alguno. En los libros escritos por físicos historiando la experimentación física apenas si se menciona el período comprendido entre Newton y Lagrange, y de lo poco que se dice, la mayor parte no suele ser sino una descripción bien de la teoría, o en el mejor de los casos, de una verificación *a posteriori.* Dos ejemplos vienen al caso. Veamos el primero. Aunque en tiempos de Huygens se había experimentado considerablemente con la oscilación de péndulos, a la hora de estudiar el movimiento más general de un cuerpo rígido, no existen pruebas de que se tuviera en cuenta experimento alguno; una vez obtenida una solución exacta, la única utilidad de un posible experimento sería medir la magnitud de las fuerzas de rozamiento o la desviación con respecto a la rigidez teórica. Pero es así que desde que Euler derivara sus ecuaciones, 200 años ha, nadie ha propuesto ninguna comprobación experimental directa de las mismas. O por lo menos, yo no conozco de ninguna. No obstante se aplican y comprueban indirectamente en centenares de aparatos diseñados mediante su ayuda. Como segundo ejemplo, consideremos el descubrimiento de la ley de pandeo por Musschenbroek. No existe evidencia alguna de que Euler conociera esta ley experimental cuando dedujo su fórmula para el pandeo y hubieron de transcurrir veinte años antes de que ambas fueran comparadas. Es más, los ingenieros que se ocupaban del cálculo de estructuras parecen haber ignorado durante más de un siglo las averiguaciones de Musschenbroek pues despreciaron el resultado de Euler como otra muestra inútil de matemática pura. Y sin embargo, raro será el puente que hoy en día no sea diseñado tomando en cuenta la fórmula de Musschenbroek-Euler.

¿Cuál fue, pues, el método seguido? La mecánica racional fue una ciencia de la *experiencia,* pero no más que de la geometría se puede decir que fuera una ciencia *experimental.* Cierto es que algunos grandes experimentos fueron llevados a cabo durante la Ilustración, pero apenas si tuvieron repercusión alguna sobre el crecimiento de las teorías que hoy se consideran como clásicas. Experimentos y teorías son consecuencia de distintas reacciones frente a la experiencia. Es de esperar que ambos se complementen y comprueben mutuamente, pero incluso actualmente, con todos nuestros conocimientos tanto de los datos como del método científico a seguir, siguen siendo difíciles de relacionar. ¿Por qué hemos de suponer que hace 300 años fuera una tarea más sencilla? De hecho no lo fue. Una visión realista de la historia de la mecánica ha de admitir que tanto la mecánica racional como la experimental, ambas originadas en reacciones inteligentes de los seres humanos ante la experiencia mecánica, evolucionaron por separado.

Además de las investigaciones experimentales llevadas a cabo por particulares, también hubo en el siglo dieciocho grandes proyectos colectivos. Pero al igual que hoy en día, resultaron innecesariamente caros, a más de ser imán de administradores. Y todo este gasto no ayudó en nada a los grandes descubrimientos de aquella época.

El método seguido en las investigaciones más fructíferas fue enteramente matemático, pero los resultados no se pueden calificar de matemática pura, pues la *experiencia* fue guía constante. Tanto la experiencia física como la experiencia procedente de la acumulación de conocimientos teóricos. A esta ciencia mecánica del siglo XVIII no se la puede llamar ni física ni matemática pura, menos aún matemática aplicada: por merecimientos propios ha de llamársela *mecánica racional.*

RECONOCIMIENTO

Este ensayo lo escribí mientras disfrutaba de una beca de la U. S. National Science Foundation. Contiene temas ya expuestos en una conferencia dada a la sociedad Sigma Xi en la Universidad de Indiana (1951), en conferencias públicas dadas en la Universidad de Brown (1955) y en la Universidad Estatal de Iowa (1956), además de una conferencia ofrecida a la Sociedad de Investigación del Laboratorio Socony-Mobil en Dallas (1960). Fue publicado por primera vez en *Archive for History of Exact Sciences,* Volumen 1, pp. 3-36 (1960). Una traducción parcial al italiano fue impresa bajo el título de "La scienza del moto dai 'Principia Mathematica Naturalis Philosophiae' di Newton alla 'Méchanique Analitique' di Lagrange", *Accad. Naz. Sci. Lett. Arti di Modena, Atti e Memorie* (VI) **2**, 3-32 (1960).

En la reimpresión he corregido algunos errores y añadido unas pocas frases y notas a pie de página.

BIBLIOGRAFIA

Las siguientes obras de carácter histórico, asequibles al lector no especializado, recogen citas, detalles y menciones de las obras originales utilizadas en la redacción de varias partes del ensayo. Como ya se dijo en la Introducción, para muchos de los temas tratados, no se dispone actualmente de una historiografía adecuadamente detallada. Algunas de las afirmaciones contenidas en este ensayo se exponen en mayor detalle, con referencia explícita a las obras originales, en los ensayos cuarto y quinto de este volumen

Jouguet, E., *Lectures de mécanique,* 2 tomos, París: Gauthier-Villars, 1908, 1909, x +210 + 284 páginas.

Dugas, R., *La mécanique au XVII*^{e} *siécle.* Neuchatel: Ed. du Griffon, 1954. 620 páginas.

Truesdell, C., "I. The first three sections of Euler's treatise on fluid mechanics (1766); II. The theory of aerial sound (1687-1788); III. Rational fluid mechanics (1765-1788)." L. Euleri *Opera Omnia* (2) **13**, VII-CXVIII (1956).

Truesdell, C., "The rational mechanics of flexible or elastic bodies, 1638-1788." L. Euleri, *Opera Omnia* (2) $\mathbf{11}_2$, 428 páginas (1960).

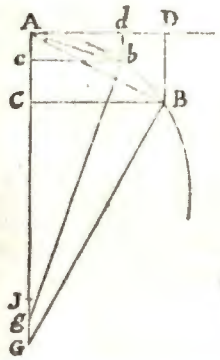
III. REACCIONES DE LA MECANICA DEL BARROCO TARDIO A LOS EXITOS, CONJETURAS, ERRORES Y FRACASOS CONTENIDOS EN EL *Principia* DE NEWTON

1. EL *Principia* DE NEWTON, LIBRO I

Los historiadores de la ciencia e incluso los autores de textos de física citan con reverencia no exenta de temor al *Principia* newtoniano; su valor viene atestiguado por el precio que los bibliófilos están dispuestos a pagar por un ejemplar de la primera edición. Casi todos ellos coinciden en expresar su reverencia y asombro ante la valía del libro venerándolo cual objeto sagrado, sin atreverse a abrir sus páginas y leerlo por miedo a profanarlo. De hecho es un libro harto difícil de leer. Si a un catedrático de la Historia de la Ciencia se le entregara, justo después de detallar ante sus alumnos la lista de los grandes descubrimientos de Newton, una página copiada al azar del *Principia,* bien podría darse el caso de que no fuera capaz de reconocer la pluma de su héroe. Es un libro muy matemático en muchas de cuyas páginas no aparece ni una palabra que tenga algo que ver con lo que historiadores y físicos dan en llamar Física (fig. 41). La nueva Historia de la Ciencia, altamente profesionalizada, se une con las Ciencias Sociales en la exclusión tácita de las matemáticas. Al contrario como ocurre con los historiadores actuales, los colegas coetáneos de Newton no le consideraban como profeta y visionario sino como un matemático de talla colosal.

El matemático posee una ventaja inapreciable frente a los restantes científicos, los historiadores, los políticos, y demás miembros de otras profesiones: puede equivocarse. *A fortiori,* también puede acertar. Encontramos errores en Euclides, pero lo que Euclides demostró ser cierto en la Grecia clásica sigue siéndolo en este nuestro inigualado presente, con todo su gigantismo, avance atómico-espacial, y socialización total. Al explorar las ciencias tanto físicas como sociales, históricas, etc., se observa cómo la frontera entre verdad y falsedad se va difuminando, llegando en algunos campos a considerar la verdad como falsa y definir lo falso como verdadero por consenso de "autoridades en la materia" y "expertos reconocidos", o incluso por sufragio popular. Un catedrático puede afirmar de las doctrinas de Karl Marx que son erróneas; un segundo, con iguales conocimientos de la materia, puede exponerlas como problemáticas, en parte ciertas, en parte no; mientras que otro, ciudadano de lejanas tierras, puede exaltarlas como la quintaesencia del conocimiento humano. Sin embargo, tres matemáticos, colegas de estos sociólogos, no discreparían sobre lo que se admite como verdad en las ciencias matemáticas. Las equivocaciones de un matemático, incluso las de un genio matemático, no son "distintos puntos de vista", ni "otras interpretaciones de los datos", ni "dictados de una ideología opuesta": son simples equivocaciones. Los matemáticos más eminentes, aquellos que han descubierto más verdades matemáticas, son también los que han publicado mayor número de demostraciones incompletas, proposiciones imprecisas, y errores crasos. En su intento de incluir la filosofía natural dentro de las matemáticas, Newton renunció a la inmunidad diplomática que habitualmente se concede a los pensadores no matemáticos. Entró así en el peligroso terreno donde un error no es más que

tia GJ minor esse potest quam assignata quavis. Est autem (ex natura circulorum per puncta ABG, Abg transeuntium) AB *quad.* æquale $AG \times BD$ & Ab *quad.* æquale $Ag \times bd$, adeoq; ratio AB *quad.* ad Ab *quad.* componitur ex rationibus AG ad Ag & BD ad bd. Sed quoniam JG assumi potest minor longitudine quavis assignata, fieri potest ut ratio AG ad Ag minus differat a ratione æqualitatis quam pro differentia quavis assignata, adeoq; ut ratio AB *quad.* ad Ab *quad.* minus differat a ratione BD ad bd quam pro differentia quavis assignata. Est ergo, per Lemma I, ratio ultima AB *quad.* ad Ab *quad.* æqualis rationi ultimæ BD ad bd. *Q. E. D.*



Cas. 2. Inclinetur jam BD ad AD in angulo quovis dato, & eadem semper erit ratio ultima BD ad bd quæ prius, adeoq; eadem ac AB *quad.* ad Ab *quad.* *Q. E. D.*

Cas. 3. Et quamvis angulus D non detur, ~~tamen anguli D, d~~ ad æqualitatem semper vergent & propius accedent ad invicem quam pro differentia quavis assignata, adeoq; ultimo æquales erunt, per Lem. I. & propterea lineæ BD, bd, in eadem ratione ad invicem ac prius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde cum tangentes AD, Ad, arcus AB, Ab & eorum sinus BC, bc fiant ultimo chordis AB, Ab æquales; erunt etiam illorum quadrata ultimo ut subtensæ BD, bd.

Corol. 2. Triangula rectilinea ADB, Adb sunt ultimo in triplicata ratione laterum AD, Ad, inq; sesquiplicata laterum DB, db: Utpote in composita ratione laterum AD & DB, Ad & db existentia. Sic & triangula ABC, Abc sunt ultimo in triplicata ratione laterum BC, bc.

Corol. 3. Et quoniam DB, db sunt ultimo parallela & in duplicata ratione ipsarum AD, Ad; erunt areæ ultimæ curvilineæ

Fig. 41. Típico pasaje puramente matemático del *Principia*, reproducido a partir de una copia, con comentarios a mano por Halley, actualmente en la biblioteca de la Universidad de Texas

un error a secas. El que el error se deba a Newton no lo disculpa ni lo agrava, tan sólo lo destaca.

El gran matemático se equivoca de dos maneras: cometiendo faltas triviales fácilmente corregibles por cualquiera, o fracasando en su investigación. Estos fracasos reflejan la magnitud de la empresa acometida y suelen ser tanto o más importantes que sus éxitos ya que guían a otros matemáticos por el camino de nuevos descubrimientos. A menudo, la equivocación de un gran matemático ha hecho más por la ciencia que cien impecables mini-teoremas debidos a hombres de menor talla. Como matemático, Newton raya la altura de los más grandes, pero el hecho de haber sido un matemático nos permite criticar su obra con el espíritu mesurado e implacable que exigen las Ciencias Exactas.

El *Principia* es un tratado de la mecánica del sistema solar vista desde el contexto intuído y a medio formular de una mecánica racional. Durante el siglo que sigue a su publicación, incluso hasta la llegada de Laplace, el *Principia* influyó en casi todas las investigaciones de la mecánica. Dos grandes desafíos científicos se destacan de inmediato en el *Principia,* por ser sus soluciones casi independientes:

1. Determinar con mayor precisión el movimiento de un sistema de masas puntuales regido por la ley de gravitación universal.
2. Descubrir y desarrollar la mecánica racional general buscada por Newton para aplicarla al movimiento de cuerpos, considerados como masas deformables de dimensión finita, sobre la superficie de la Tierra.

La mayor parte de los estudios de mecánica teórica llevados a cabo en el siglo XVIII intentan dar la respuesta a uno u otro de estos dos desafíos. Los historiadores de la física desde Mach hasta la fecha han estudiado tan a fondo la historia del primero que han caído en la trampa de creer que el propio Newton había resuelto el segundo y que las tres leyes que encabezan su libro bastan por sí solas como base de la mecánica. Ningún especialista moderno comparte esta opinión. Esta ilusión histórica carece de sentido incluso durante el siglo comprendido entre 1687 y 1787, pues ni el propio Newton se arrogó tales pretensiones. ¿Y los grandes sabios del siglo XVIII que tanto lucharon por dominar la mecánica de sólidos y fluidos? Mal pagados verían sus esfuerzos si algún pedagogo les contara que se habían limitado a "aplicar las leyes de Newton".

Una evaluación completa de las reacciones a que dio lugar el *Principia* habría de incluir un resumen de los estudios del dieciocho acerca del problema de los tres cuerpos y de las perturbaciones en el sistema solar. Desgraciadamente, carezco de los necesarios conocimientos para hablar de la mecánica celeste o de su historia. Mientras que hoy en día un astrónomo no parece necesitar grandes conocimientos de Mecánica, harto distinto era en tiempos de Newton, pues entonces la física todavía no había sido repartida en compartimentos estancos y los estudiantes de las ciencias naturales todavía no estaban seguros de qué materias podían despreciar con impunidad. Aún no había nacido el especialista.

Al tiempo de escribir su *Principia,* Newton estaba interesado sobre todo en la parte de la mecánica que se ocupa del movimiento de los cuerpos celestes. Comienza por tratar a éstos como puntos que se mueven sujetos tan sólo a dos fuerzas: la gravitación universal y su propia inercia. Para justificar un modelo en el cual cuerpos tan inmensos como el Sol, la Tierra, o la Luna están representados por puntos

matemáticos, pasa a demostrar que la fuerza de atracción entre dos esferas formadas por capas concéntricas homogéneas se encuentra sobre la línea que une sus centros y es independiente de los diámetros. Aquí (fig. 42) falla su programa de deducción a partir de las Leyes, de parecida manera a como ocurre con algunos de los razonamientos que le preceden. Sin ser en realidad necesaria, cita una vez la tercera Ley pero, de hecho, su argumentación descansa sobre una regla de adición para un número infinito de fuerzas. No enunció explícitamente ninguna regla de este tipo pues parece que consideró suficiente la ley de suma vectorial para dos fuerzas. Había expuesto esta ley como el Corolario II de las Leyes del Movimiento, pero su demostración, apoyada en el Corolario I es incorrecta[1]. Si pasamos por alto este uso de axiomas no especificados, cosa común y disculpable en obras de tan gran originalidad, podemos calificar el programa newtoniano de triunfal.

El propio Newton, empero, no estaba satisfecho con los resultados de su programa. La experiencia diaria nos enseña que los cuerpos se desplazan en el seno de diversos medios y que éstos oponen una resistencia a su movimiento. Cabe, pues, extrapolar que lo mismo ocurra con los cuerpos celestes. Por tanto, si deseamos construir una mecánica unificada, basada en leyes comunes tanto a fenómenos terrestres como sidéreos, habremos de incluir en ella la resistencia que puedan encontrar los cuerpos sidéreos. Si esto hacemos, la demostración de que grandes esferas pueden tomarse como dinámicamente equivalentes a masas puntuales cae por su base. Del hecho de que sea pequeña la resistencia que ofrece el aire al paso de una pelota de tenis no se sigue nada acerca de la resistencia que pueda encontrar un planeta que se mueve con enorme velocidad por su órbita.

2. EL *Principia* DE NEWTON, LIBRO II

El problema expuesto al final del apartado anterior se lo planteó Newton en el Libro II del *Principia.* Por cierto, ésta es una parte del *Principia* que suelen ignorar alegremente tanto historiadores como filósofos. Puede que Newton tuviera la espe-

---

[1] En términos modernos, reemplazando los gránulos de impulso por fuerzas, se podría demostrar el Corolario I esquemáticamente como sigue. Sean dos fuerzas f_1 y f_2 que dan lugar a sendos movimientos x_1 (t) y x_2 (t) en un cuerpo de masa m. Por la segunda ley,

$$f_1 = m\ddot{x}_1,\ f_2 = m\ddot{x}_2.$$

Sumando ambas ecuaciones,

$$f_1 + f_2 = m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2).$$

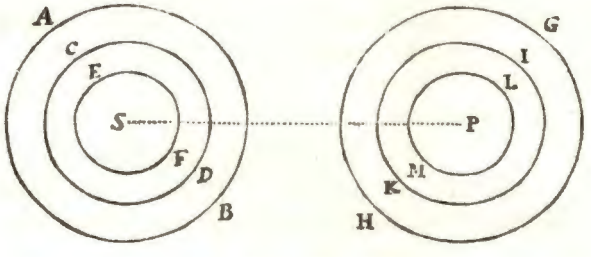
Sabemos por cinemática que las aceleraciones se suman vectorialmente, esto es,

$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = \ddot{x}_3$. Ahora bien, según la Ley II

$$f_3 = m\ddot{x}_3$$

Por tanto, $f_1 + f_2 = f_3$. Esto es, las fuerzas también se suman vectorialmente. Este razonamiento tan sólo es aplicable a fuerzas *resultantes.* En Estática estas fuerzas son todas iguales a **0**, y por tanto, todos los pasos intermedios de la demostración se reducen a la igualdad **0** = **0**. La adición vectorial de las componentes de una fuerza de resultante **0** es esencial para la Estática, en particular para la teoría de la atracción. Esta composición no puede deducirse de ninguna ley que se limite a relacionar las fuerzas con los movimientos que produzcan.

Sunto Sphæræ quotcunq; concentricæ ſimilares *AB*, *CD*, *EF* &c. quarum interiores additæ exterioribus componant materiam denſiorem verſus centrum, vel ſubductæ relinquant tenuiorem; & hæ, per Theor. XXXV, trahent Sphæras alias quotcunq; concentricas ſimilares *GH*, *IK*, *LM*, &c. ſingulæ ſingulas, viribus reciproce proportionalibus quadrato diſtantiæ *SP*. Et componendo vel dividendo, ſumma virium illarum omnium, vel exceſſus aliquarum ſupra alias, hoc eſt, vis qua Sphæra tota ex concentricis quibuſcunq; vel concentricarum differentiis compoſita *AB*, trahit totam ex concentricis quibuſcunq; vel concentricarum differentiis compoſitam *GH*, erit in eadem ratione. Augeatur numerus Sphærarum concentricarum in infinitum ſic, ut materiæ denſitas una cum vi attractiva, in progreſſu a circumferentia ad centrum, ſecundum Legem quamcunq; creſcat vel decreſcat: & addita materia non attractiva compleatur ubivis denſitas deficiens, eo ut Sphæræ acquirant formam quamvis optatam; & vis qua harum una attrahet alteram erit etiamnum (per argumentum ſuperius) in eadem illa diſtantiæ quadratæ ratione inverſa. Q. E. D.



Corol. 1. Hinc ſi ejuſmodi Sphæræ complures ſibi invicem per omnia ſimiles ſe mutuo trahant; attractiones acceleratrices ſingularum in ſingulas erunt in æqualibus quibuſvis centrorum diſtantiis ut Sphæræ attrahentes.

Corol. 2. Inq; diſtantiis quibuſvis inæqualibus, ut Sphæræ attrahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum inter centra.

Corol.

Fig. 42. Demostración dada por Newton de la proposición de que la atracción resultante entre dos esferas divididas de la misma manera en capas concéntricas varía según la inversa del cuadrado de la distancia entre sus centros, tomada del *Principia*

ranza de poder demostrar que todas las resistencias descritas por leyes teóricas sencillas debería, en última instancia, afectar por igual el movimiento de un "cuerpo". Pero al encontrarse con que los efectos debidos al rozamiento variaban según la ley teórica postulada, se vió obligado a iniciar la búsqueda de la verdadera naturaleza de la resistencia que ofrece un fluido al desplazamiento de un cuerpo finito en su seno. Su metafísica le llevó a la convicción de que la explicación de los fenómenos celestes debía encontrarse en la mecánica terrestre. Evidentemente, tal metafísica no está restringida, como sucede con la perspectiva del físico moderno, a considerar los conceptos de inercia y gravitación como principio y fin de la mecánica "clásica". Hoy en día se le enseña al estudiante de física a despreciar gran parte de los fenómenos que ocurren en su alrededor por ser "macroscópicos", "aproximados", o "carentes de contenido físico". No habiendo aprendido en tal escuela, Newton buscó las leyes celestes allá donde había explorado las leyes de la inercia: en la experiencia terrena. Pero había que descubrir previamente la leyes que rigen el movimiento de los fluidos en la Tierra, lo cual no es tarea fácil pues mientras que sólo existe un tipo de inercia, hay muchas clases de fluidos presentando una asombrosa variedad de comportamientos. Newton se imaginaba los fluidos de dos maneras muy distintas: unas veces como compuestos por partículas discretas que "huían unas de otras", y otras veces como un medio "continuado". Aquí se desmorona su programa de deducción racional a partir de los axiomas. Ahora Newton tiene que recurrir a menudo a comentarios puramente cualitativos que a veces denomina "corolarios" a pesar de no estar demostrados a partir de las proposiciones ni éstas a partir de los axiomas. Su argumentación es difícil de seguir pues no se limita a simples conjeturas: de cuando en cuando aparecen demostraciones matemáticas correctas de los detalles más sencillos. En esto coincide con los escritos de Galileo que también presentan una apariencia de construcción lógica sin ser en realidad más que un conjunto de intuiciones.

Los temas tratados en el Libro II son los siguientes:

1. Afirmaciones genéricas y poco claras acerca de las resistencias y movimientos que experimentan las partes de un fluido.
2. Resistencias de esferas y cilindros en el seno de un medio rarificado y estático.
3. Estudio del movimiento, basado en la Estática, de un fluido "continuado" que cae por una abertura practicada en un recipiente.
4. Resistencias que experimentan esferas, cilindros, y esferoides en el seno de un fluido "continuado", bien tenga éste un volumen infinito, bien esté contenido en un canal.
5. Comentarios genéricos sobre la propagación de presiones en un agregado de partículas.
6. Oscilaciones de un fluido incompresible en un tubo con forma de U.
7. La velocidad de ondas superficiales y la naturaleza del movimiento del fluido que las origina.
8. La velocidad del sonido en un gas.
9. Las resistencias de cilindros y esferas que giran sobre sí mismas en el seno de un fluido dotado de rozamiento interno.

Al estudiar todos estos problemas de mecánica de fluidos Newton parece haberse olvidado de su intención original, pues nunca llega a aplicar al sistema solar sus

conclusiones acerca de la resistencia. Quizás porque tales conclusiones son tan variadas e hipotéticas que resultan imposibles de aplicar. Concluye el Libro II con una proposición dirigida a destruir la teoría descartiana de los vórtices planetarios. Esta proposición, además de no estar relacionada con nada de lo que la antecede, carece de sentido por no estar definidos los conceptos que la componen; por otra parte, la "demostración" se apoya en un dudoso principio de solidificación ya anteriormente utilizado en una proposición acerca de la "catarata".

En algunas ramas de la ciencia, tales como la mecánica celeste y la cinemática elemental de los "cuerpos", habían ido acumulándose a lo largo de siglos e incluso milenios una inmensa cantidad de datos fidedignos y modelos teóricos; no fue éste el caso con la mecánica de fluidos. Newton carecía, pues, de una base para su "intuición física", que es como los físicos gustan de llamar al proceso de aplicar el sentido común a la experiencia previamente organizada. Así resultó un Libro II casi por entero original.

En los escritos contemporáneos sobre Historia de la Ciencia ocurre lo mismo que en el comportamiento social: es de muy mal gusto llamar a las cosas por su nombre. En particular, la tendencia al eufemismo llega al extremo de rechazar de plano el que pueda haber algo erróneo en la Ciencia. Según parece, lo que verdaderamente interesa es llegar a conocer la manera en que los científicos de una época se planteaban y razonaban los problemas de la Naturaleza, y como enjuiciaban su obra y la de sus colegas. Al aprendiz de esta materia se le advierte la necesidad de no tomar partido, que no siga las huellas de los historiadores positivistas del siglo pasado. Esto es, no debe dividir la Ciencia pasada en categorías dicotómicas de verdad o falsedad según coincida o no con el varemo de nuestra época[2]. Por mucho que esta actitud ayude a mantener la paz y buenas relaciones entre los historiadores de la ciencia, olvidan éstos el hecho importante de que los científicos buscan *la* verdad y no *una* verdad. Aquel que renuncia a tomar partido de hecho niega la misma ciencia al despojarla de su único objetivo y reducirla a un fenómeno social más. Este intento de imparcialidad menosprecia a los grandes científicos del pasado además de pecar contra el propio objeto cuya historia intenta escribir, la ciencia.

El estudio que hizo Newton sobre el flujo de agua que sale de un recipiente

---

[2] Para que esta observación mía no parezca infundada, añado una cita tomada del elogio escrito por Mr. Cohen en memoria de A. Koyré publicado en la revista *Isis*, vol. 57, pág. 161 (1966). Después de afirmar que Koyré "fue el autor principal de la *nueva* historia de la ciencia", Mr. Cohen aclara "rechazó el método de ciertos eruditos modernos que valoran cada proposición independientemente del contexto de la época en que fue escrita; esto es, juzgándola a la luz de las teorías y datos actualmente admitidos. Según Koyré, tales historiadores no se ocupan del análisis conceptual; no intentan comprender los razonamientos de los científicos del pasado ni cómo pudieron obtener sus resultados con el limitado arsenal tanto teórico como experimental. El Profesor Koyré estaba interesado ante todo en captar la medida en que estos científicos 'acertaban' dentro del esquema de sus conocimientos, no de los nuestros."

La extensión lógica del método de Koyré sería extirpar tanto de la formación como de la bibliografía del erudito newtoniano todos los escritos de matématica y física aparecidos después de Newton por miedo a que sugiriesen aplicaciones y generalizaciones de sus ideas que no podría de ninguna manera haber influído sobre "aquellos científicos pasados... 'correctos' en función de su propia época, no de la nuestra".

¿Por qué no llevar a su más alto grado la imparcialidad científica de estos nuevos historiadores? Incluso ellos mismos admiten que la ciencia se ocupa de la teoría y la demostración de los fenómenos naturales. Ahora bien, si esta ciencia está condicionada temporal, social, e institucionalmente, ¿sucede lo mismo con los fenómenos que investiga? Si el movimiento mecánico perpetuo y la transmutación química de los elementos se consideran imposibles hoy en día, ¿acaso eran posible en tiempos de Leonardo o Newton?

ſit $\frac{2d}{e}S$ & latitudo eadem quæ foraminis, poſſet eo tempore defluendo egredi de vaſe, hoc eſt columna $\frac{2d}{e}SF$. Quare motus $\frac{2dd}{ee}SFV$, qui fiet ducendo quantitatem aquæ effluentis in velocitatem ſuam, hoc eſt motus omnis tempore effluxus illius genitus, æquabitur motui $AF \times V$. Et ſi æquales illi motus applicenter ad FV; fiet $\frac{2dd}{ee}S$ æqualis A. Unde eſt dd ad ee ut A ad $2S$, & d ad e in dimidiata ratione $\frac{1}{2}A$ ad S. Eſt igitur velocitas, quacum aqua exit e foramine, ad velocitatem quam aqua cadens, & tempore T cadendo deſcribens ſpatium S acquireret, ut altitudo aquæ foramini perpendiculariter incumbentis, ad medium proportionale inter altitudinem illam duplicatam & ſpatium illud S, quod corpus tempore T cadendo deſcriberet.

Igitur ſi motus illi ſurſum vertantur; quoniam aqua velocitate V aſcenderet ad altitudinem illam S de qua deciderat; & altitudines (uti notum eſt) ſint in duplicata ratione velocitatum: aqua effluens aſcenderet ad altitudinem $\frac{1}{2}A$. Et propterea quantitas aquæ effluentis, quo tempore corpus cadendo deſcribere poſſet altitudinem $\frac{1}{2}A$, æqualis erit columnæ aquæ totius AF foramini perpendiculariter imminentis.

Cum autem aqua effluens, motu ſuo ſurſum verſo, perpendiculariter ſurgeret ad dimidiam altitudinem aquæ foramini incumbentis; conſequens eſt quod ſi egrediatur oblique per canalem in latus vaſis, deſcribet in ſpatiis non reſiſtentibus Parabolam cujus latus rectum eſt altitudo aquæ in vaſe ſupra canalis orificium, & cujus diameter horizonti perpendicularis ab orificio illo ducitur, atque ordinatim applicatæ parallelæ ſunt axi canalis.

Hæc omnia de Fluido ſubtiliſſimo intelligenda ſunt. Nam ſi aqua ex partibus craſſioribus conſtet, hæc tardius effluet quam pro ratione ſuperius aſſignata, præſertim ſi foramen anguſtum ſit per quod effluit.

Fig. 43. El razonamiento dado por Newton de que la reacción de un chorro saliendo de un recipiente es igual a la que se necesitaría para mantener taponado el agujero, de la primera edición del *Principia*, 1687

generari quo tempore Globus duas tertias diametri ſuæ partes, velocitate uniformiter continuata deſcribat, ut denſitas Medii ad denſitatem Globi, ſi modo Globus & particulæ Medii ſint ſumme elaſtica & vi maxima reflectendi polleant: quodque hæc vis ſit duplo minor ubi Globus & particulæ Medii ſunt infinite dura & vi reflectendi prorſus deſtituta. In Mediis autem continuis qualia ſunt Aqua, Oleum calidum, & Argentum vivum, in quibus Globus non incidit immediate in omnes fluidi particulas reſiſtentiam generantes, ſed premit tantum proximas particulas & hæ premunt alias & hæ alias, reſiſtentia eſt adhuc duplo minor. Globus utique in hujuſmodi Mediis fluidiſſimis reſiſtentiam patitur quæ eſt ad vim qua totus ejus motus vel tolli poſſit vel generari quo tempore, motu illo uniformiter continuato, partes octo tertias diametri ſuæ deſcribat, ut denſitas Medii ad denſitatem Globi. Id quod in ſequentibus conabimur oſtendere.

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA VIII.

Aquæ de vaſe Cylindrico per foramen in fundo factum effluentis definire motum.

Sit *ACDB* vas cylindricum, *AB* ejus orificium ſuperius, *CD* fundum horizonti parallelum, *EF* foramen circulare in medio fundi, *G* centrum foraminis, & *GH* axis cylindri horizonti perpendicularis. Et concipe cylindrum glaciei *APQB* ejuſdem eſſe latitudinis cum cavitate vaſis, & axem eundem habere, & uniformi cum motu perpetuo deſcendere, & partes ejus quam primum attingunt ſuperficiem *AB* liqueſcere, & in aquam converſas gravitate ſua defluere in vas, & cataractam vel columnam aquæ *ABNFEM* cadendo formare, & per foramen *EF* tranſire, idemque adæquate implere. Ea vero ſit uniformis velocitas glaciei deſcendentis ut & aquæ contiguæ in circulo *AB*, quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *IH* acquirere poteſt; & jaceant *IH* & *HG* in directum, & per punctum *I* ducatur recta *KL* horizonti parallela lateribus glaciei.

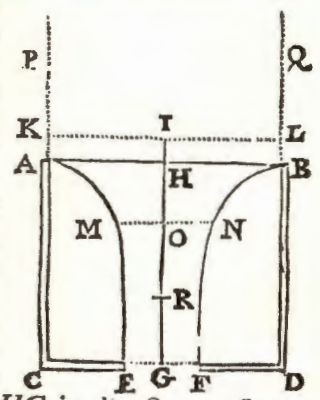


Fig. 44. Página 303 de la segunda edición del *Principia* (1713), en la cual introduce Newton la "catarata" de hielo para obtener un valor de la velocidad $\sqrt{2}$ veces el de la edición de 1687

sirve para reforzar nuestro argumento anterior. En la primera edición del *Principia* ofrece un razonamiento esencialmente estático abandonando sus propias leyes del movimiento (fig. 43). Al percatarse de que su resultado final estaba en contradicción con los resultados experimentales, en la segunda edición sustituyó todo este apartado por un argumento aún menos plausible basado en la ficción *ad hoc* de una catarata de hielo fundente (fig. 44). Está claro que Newton se dio cuenta de su equivocación inicial aunque no especificara de qué manera. Tuvo que recurrir a un razonamiento enmarañado que le diese la respuesta "correcta". Hablando con toda precisión, su primer análisis es incorrecto y el segundo no pasa de ser un simple farol. De la misma manera se puede atacar el cálculo que hiciera de la velocidad del sonido. En la segunda edición del *Principia* introduce la invención de "el grosor de las partículas del aire" para así obtener lo que vulgarmente se llama un "factor de cocción" que le diera el valor numérico deseado a partir de una teoría recalcitrante.

Fueron estos dos endebles puntales, la "catarata" y las "partículas sólidas del aire", tal falsos como los vórtices cartesianos, los que dieron lugar a las mayores críticas del *Principia.* Frente al éxito del Libro I, el Libro II, considerado como ensayo hacia una mecánica matemática unificada, fue un fracaso.

A pesar de esta sucesión anárquica de demostraciones matemáticas, hipótesis brillantes, intuiciones, faroles y errores crasos, el Libro II ha sido justamente alabado por ser la manifestación más grandiosa del genio de Newton. El Libro II fue propiamente un reto lanzado a los geómetras de la época. Vieron ante sí la necesidad de corregir los errores, reemplazar las intuiciones mediante hipótesis claras, ordenar estas hipótesis dentro de un esquema de la mecánica racional, sustituir los faroles por demostraciones matemáticas y crear nuevos conceptos para lograr lo que Newton no había conseguido. No es exagerado afirmar que la mecánica racional, y por tanto, la física matemática junto con la visión de la Naturaleza a que ésta da lugar, nació de este desafío, aceptada como fue por la escuela matemática de Basilea. Esta estuvo compuesta por los Bernoulli y Euler, cuya obra sirvió de base a Lagrange, Fourier, Poisson, Navier, Cauchy, Green, Stokes, Kelvin, Helmholtz, Kirchhoff, Maxwell, y Gibbs para construir la llamada física clásica. Entre los años 1700 y 1750, la escuela de Basilea tuvo competidores en Taylor, MacLaurin, Clairaut, y D'Alembert aunque tan sólo la obra de este último es comparable.

3. Exito y tradicion en la mecanica pre-newtoniana

Los geómetras basilienses no deben considerarse como discípulos de Newton. Su postura inicial frente a él fue más bien escéptica aunque más tarde le admitieran a regañadientes algunos resultados aislados. La gran labor de Newton no fue, a pesar de su importancia, causante de la revolución en el pensamiento científico que los historiadores de los últimos dos siglos han dado en imaginarse. En primer lugar, Newton pasó por alto el estudio de tres sistemas mecánicos fundamentales, que ya habían sido investigados con éxito diverso por otros científicos. Estos sistemas son:

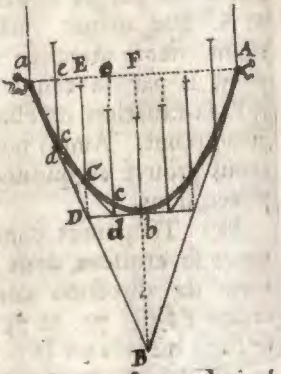
1. *Cuerpos rígidos.*—El famoso comentario newtoniano acerca de la inercia de un trompo en rotación no le llevó a intentar formular ninguna teoría concreta de la rotación; tampoco mencionó el problema de la oscilación pendular de un

Fig. 45. Christiaan Huygens (1629-1695), según un cuadro de Kaspar Netscher del año 1671, Colección Haags Gemeentemuseum – La Haya

le centre de gravité *b* de la corde A*b*a.

LXXV. *Les chaînes & les cordes ordinaires ne ſe courbent pas en parabole.*

Quelques-uns ont penſé que les cordes & les chaînes attachées par les



deux bouts ſe courboient en ligne parabolique. Mais

Fig. 46. Solución dada por Pardies al problema del puente de suspensión (1673)

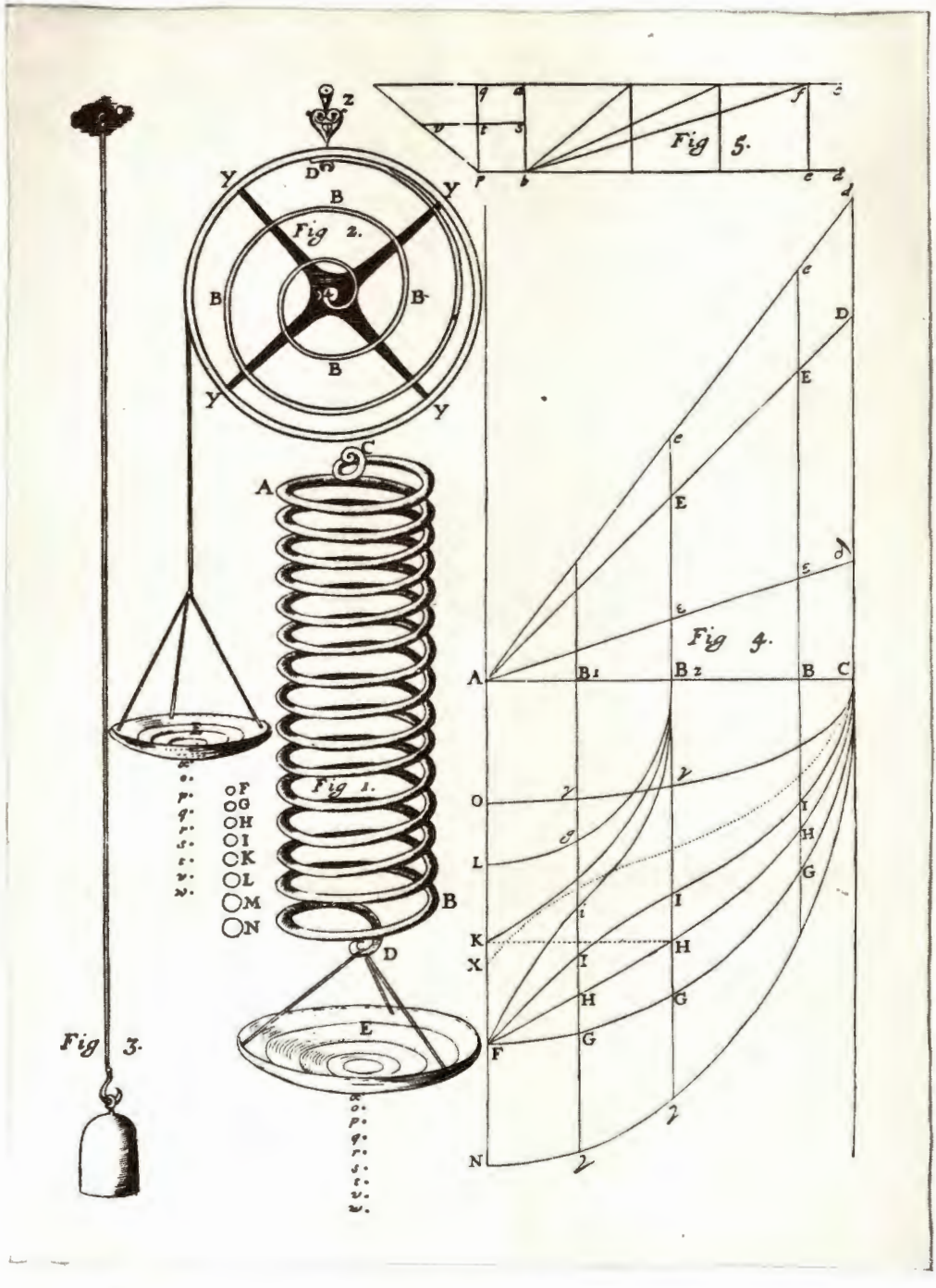


Fig. 47. La placa del panfleto de Hooke, *Lectures De Potentia Restitutiva, or of Spring, Explaining the Power of Springing Bodies,* 1678

cuerpo finito, bien que una solución correcta al mismo, basada en hipótesis restrictivas, ya había sido publicada por Huygens en 1673.

2. *Cuerpos flexibles.*—Los problemas de la cuerda vibrante y de la catenaria habían sido extensamente discutidos antes del nacimiento de Newton. El que la mayor parte de los trabajos de Beeckman y Huygens permaneciera sin publicar no fue obstáculo para que fueran bien conocidos en el extranjero. Mersenne publicó sus leyes empíricas de las vibraciones en 1625, y Pardies, en 1673, su impresionante solución del problema del puente colgante (fig. 46). A la fuerza, Newton tenía que conocer gran parte, si no todos, de estos resultados; no obstante, sus escritos no mencionan ninguno de estos temas.

3. *Cuerpos elásticos.*—Galileo había comentado acerca de la ruptura de cuerpos sólidos, y otros autores habían intentado formular una teoría de la elasticidad. Tan sólo en la descripción newtoniana de la presión de un gas compuesto por partículas encontramos alguna relación con estos temas. Newton debía estar familiarizado no sólo con las vociferaciones de Hooke acerca de la elasticidad (fig. 47), tan difundidas en 1678, sino también el brillante estudio que hiciera Leibniz en 1684 con el que inició la teoría matemática de los esfuerzos, aplicando por primera vez el cálculo integral a problemas relacionados con fuerzas de contacto.

La mecánica newtoniana dio lugar a una nueva corriente de pensamiento científico, pero la preponderancia que ésta alcanzara no obstaculizó ni absorbió de inmediato la evolución paralela de otras. Estas fueron:

1. *Estática*

a) *El paralelogramo de fuerzas y la ley de la palanca.*—Mediante ejemplos, Newton nos enseñó a utilizar en problemas cinéticos el concepto estático de fuerza, y sin embargo, al explicar las fuerzas, considera que éstas sólo son detectables cuando dan lugar a movimientos. Si esto fuera cierto, no existiría la ciencia de la Estática. Puede parecer paradójico que, habiendo sido mayormente Newton quien nos mostrara cómo aplicar los conocimientos obtenidos del concepto de equilibrio a la resolución de los problemas del movimiento, su concepción de la Mecánica fuera tan frágil en cuanto a la Estática se refiere. En 1687, año en que apareció el *Principia,* publicó Varignon su *Proyecto de una Nueva Mecánica* (fig. 48), en el cual se aplica el principio del paralelogramo de fuerzas, inferido desde una postura más bien aristotélica, a la solución de una clase de problemas que no habían sido investigados por Newton. El libro es pedestre, pero se puede incluir en la tradición didáctica de Stevin (fig. 49). Ello es muestra de que esta antigua tradición, independiente de la escuela newtoniana, seguía entonces, igual que hoy, todavía en vigor. La ley de la palanca se conocía de antiguo y hubo numerosos intentos frustrados, incluido el de Varignon, de deducirla a partir del equilibrio de fuerzas. Desgraciadamente el fascinante estudio de estos intentos cae fuera del ámbito de este ensayo.

b) *Trabajos virtuales.*—Puede que el principio de los trabajos virtuales fuera de origen peripatético, pero una formulación correcta de la misma fue la esbozada

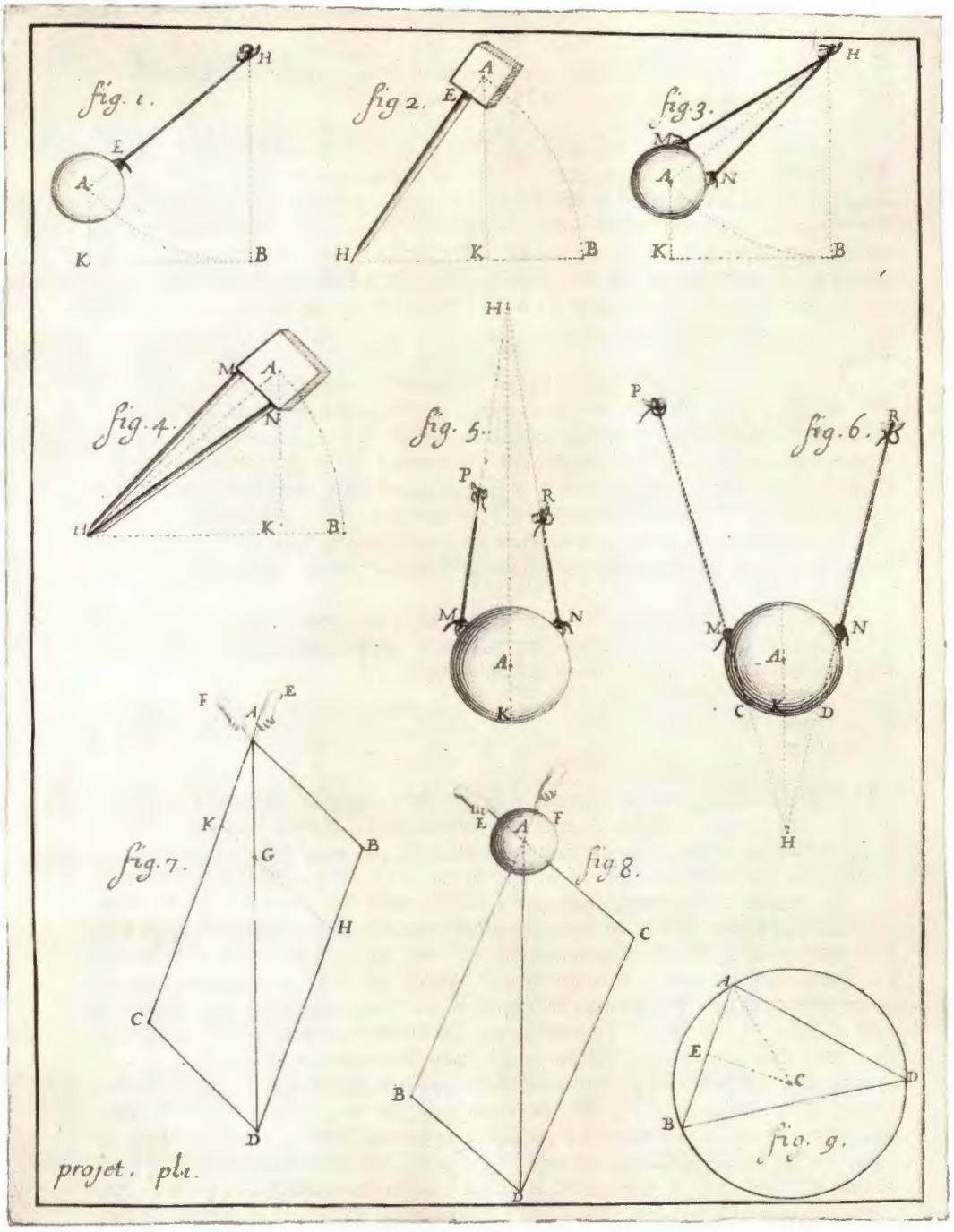


Fig. 48. Placa núm. 1 del *Projet d'une Nouvelle Méchanique*, 1687, de Varignon, una de las muchas ilustrando el paralelogramo de fuerzas

ſur P, repoſe auſſi ſur I, & partant comme GO à GP, ainſi ſeront les peſanteurs qui repoſent ſur I & H.

Concluſion. Une colomne donc repoſant, &c.

COROLLAIRE.

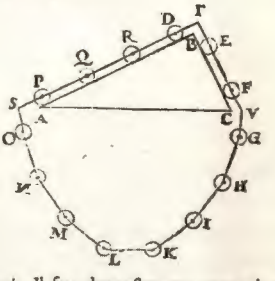
Il eſt manifeſte par ce que devant, que voulant recognoiſtre la raiſon de la peſanteur repoſant ſur I, à celle qui repoſe ſur H, qu'on doit à ceſte fin mener les perpendiculaires K L, M N, coupant l'axe és poincts O, P; & que la raiſon de G O à G P ſeroit la requiſe; ainſi donc, lors que la peſanteur de la colomne eſt notoire, qu'auſſi ſeront les peſanteurs de celles qui repoſent ſur chacun poinct, tel que H, I.

JUSQUES ICY ONT ESTE declarées les proprietez des peſanteurs directes; ſuivent les proprietez & qualitez des obliques, deſquelles le fondement general eſt compris au Theoreme ſuivant.

THEOREME XI. PROPOSITION XIX.

SI un triangle, a ſon plan perpendiculaire à l'horizon, & ſa baſe parallele à icelluy; & ſur un chacun des deux autres coſtez un poids ſpherique, de peſanteur egale; comme le coſté dextre du triangle, au ſeneſtre; ainſi la puiſſance du poids ſeneſtre, à celle du poids dextre.

Le donné. Soit A B C un triangle ayant ſon plan perpendiculaire à l'horizon, & ſa baſe AC parallele à icelluy horizon: & ſoit ſur le coſté A B (qui eſt double à B C) un poids en globe D, & ſur B C un autre E, egaux en peſanteur & en grandeur.



Le requis. Il faut demonſtrer que comme le coſté A B à au coſté B C ı, ainſi la puiſſance ou pouvoir du poids E à celle de D.

Preparation. Soit accommodé à l'entour du triangle un entour de 14 globes, egaux en peſanteur, en grandeur, & equidiſtans, comme D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, enfilez d'une ligne paſſant par leurs centres, ainſi qu'ils puiſſent tourner ſur leurs ſuſdits centres, & qu'il y puiſſe avoir 2 globes ſur le coſté B C, & 4 ſur B A, alors comme ligne à ligne, ainſi le nombre des globes au nombre des globes: qu auſſi en S, T, V, ſoyent trois poincts fermes, deſſus leſquels la ligne, ou le filet puiſſe couler, & que les deux parties au deſſus du triangle ſoyent paralleles aux coſtez d'icelluy A B, B C; tellement que le tout puiſſe tourner librement & ſans accrochement, ſur leſdits coſtez A B, B C.

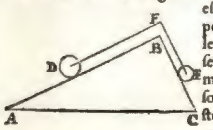
DEMONSTRATION.

Si le pouvoir des poids D, R, Q, P, n'eſtoit egal au pouvoir des deux globes E, F, l'un coſté ſera plus peſant que l'autre, donc (s'il eſt poſſible) que les 4 D, R, Q, P, ſoyent plus peſans que les deux E, F; mais les 4 O, N, M, L, ſont egaux aux 4 G, H, I, K; parquoy le coſté des 8 globes D, R, Q, P, O, N, M, L, ſera plus peſant ſelon leur diſpoſition, que non pas les 6, E, F, G, H, I, K, & puis que la partie plus peſante emporte la plus legere, les 8 globes deſcendront, & les autres 6 monteront: Qu'il ſoit ainſi donc, & que D vienne, où O eſt preſentement, & ainſi des autres; voire que E, F, G, H, viennent, où ſont maintenant P, Q, R, D, auſſi I, K, où ſont maintenant E, F: Ce neantmoins l'entour des globes aura la meſme diſpoſition qu'auparavant, & par meſme raiſon les 8 globes auront le deſſus en peſanteur, & en tombant feront revenir 8 autres en leurs places, & ainſi ce mouvement n'auroit aucune fin, ce qui eſt abſurde. Et de meſme ſera la demonſtration de l'autre coſté: La partie donc de l'entour D, R, Q, P, O, N, M, L, ſera en equilibre avec la partie E, F, G, H, I, K; que ſi on oſte des deux coſtez, les peſanteurs egales, & qui ont meſme diſpoſition, comme ſont les 4 globes O, N, M, L, d'une part, & les 4, G, H, I, K, d'autre part; les 4 reſtans D, R, Q, P, ſeront & demeureront en equilibre avec les 2 E, F; parquoy E aura un pouvoir double au pouvoir de D; comme donc le coſté B A 2, au coſté B C 1, ainſi le pouvoir de E, au pouvoir de D.

Concluſion. Si un triangle donc a ſon plan, &c.

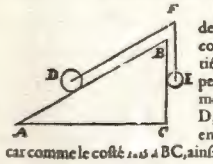
COROLLAIRE I.

Soit A B C un triangle comme devant, & A B double à B C, & ſoit D un globe ſur A B, double à E, qui eſt ſur B C; en F ſoit un poinct ferme, par deſſus lequel la ligne DFE puiſſe couler ſans empeſchement, ainſi que D F, F E ſoyent paralleles aux coſtez du triangle A B C, procedantes des centres des globes; il appert que D, E ſeront encor en equilibre, puis que cy-deſſus P, Q, R, D, l'eſtoyent à E, F; parquoy comme A B à B C, ainſi le globe D au globe E.



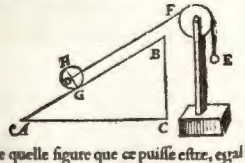
COROLLAIRE II.

Soit maintenant l'un des coſtez du triangle, comme BC (qui eſt moitié de l'autre A B) perpendiculaire à AC, comme cy joignant; le globe D, qui eſt double à E, ſera encor en equilibre avec E, car comme le coſté A B à B C, ainſi le globe D au globe E.



COROLLAIRE III.

Soient derechef les meſmes poſées, mais au lieu du poinct ferme F, ſoit adaptée une poulie comme icy, ainſi que D F demeure parallele à A B; & que E ſoit un poids de quelle figure que ce puiſſe eſtre, egal en peſanteur à celuy de devant; icelluy avec D, ſeront encor en equilibre, parquoy comme A B à B C, ainſi D à E.



COROL-

Fig. 49. El razonamiento en favor del paralelogramo de fuerzas en el *De Beghinselen der Weeghconst*, 1586, de Stevin, según la reedición en francés de 1634.

por Descartes. Este principio habría de permanecer en la periferia de la mecánica hasta que Lagrange, en 1788, lo tomó como su principal axioma.

c) *El efecto de las fuerzas de contacto.*—Es difícil seguir la pista del concepto de fuerzas internas ejercidas por unas partes de un cuerpo sobre otras, aunque sí se puede afirmar que fue rozado por Galileo y utilizado explícitamente en el tratado de Pardies.

2. *Dinámica*

a) *El principio de la energía.*—Un principio de energía restringido fue propuesto como axioma y utilizado con éxito por Huygens. Otro principio de este tipo fue publicado por Leibniz en 1686.

b) *El principio de la fuerza inercial.*—Es costumbre atribuir este principio a Newton o D'Alembert, aunque no existen pruebas de que Newton lo dominara hasta el punto de poderlo aplicar a cuerpos finitos. Desde luego, el principio era conocido y extensamente utilizado antes de la aparición en 1743 del tratado de D'Alembert, donde, a decir verdad, resulta difícil de localizar.

4. Un retazo de la obra de los Bernoulli

Como ya dijimos, el paralelogramo de fuerzas, la ley de la palanca, el principio de los trabajos virtuales, el efecto de las fuerzas de contacto, y el principio de la energía tuvieron una larga historia antes de ser definitivamente absorbidos por el pensamiento newtoniano. Por su parte, el principio de la fuerza inercial tuvo los mismos antecedentes que la mecánica newtoniana, pero se desarrolló independientemente hasta encontrar su primera formulación explícita en 1686. Este principio acabaría por absorber tanto la dinámica newtoniana como las restantes formulaciones dinámicas. Fue idea de Jaime Bernoulli el desechar el restringido principio de energía debido a Huygens y calcular la oscilación pendular de un cuerpo mediante procedimientos tomados de la Estática. Consideró válida la ley de la palanca tanto en movimiento como en reposo, siempre que el movimiento diera lugar a fuerzas por unidad de masa iguales a las aceleraciones con sus sentidos invertidos. En su nota de 1686, Jaime Bernoulli no plantea con toda corrección este principio pero es el primero en siquiera aproximarse. Sin embargo, lo expresó y aplicó correctamente en su gran trabajo de 1703, bien que restringiéndose al péndulo (véanse figuras 87 y 88).

Habrían de pasar muchos años antes de poder concebirse este principio unificador en su forma más general. Desde nuestra perspectiva actual vemos que, para que resultara de alguna utilidad, era condición previa el disponer de una ciencia de la Estática mucho más evolucionada. Esta evolución también sería en gran parte obra de Jaime Bernoulli.

Es bien sabida que la curva catenaria fue determinada en 1690 por Juan Bernoulli, Huygens, y Leibniz en concurso público. Es menos conocido el hecho de que los tres utilizaron artificios muy restrictivos para deducir las ecuaciones que habrían de ser resueltas. Newton, y con él la escuela inglesa, permanecieron ajenos a este

problema, el cual, a su vez, tampoco se vio influenciado por la publicación del *Principia* tres años antes. En la célebre competición de 1690, Jaime Bernoulli no había estado a la altura de su hermano menor, pues no consiguió presentar la solución de este problema en el tiempo prefijado. Quizás espoleado por este fracaso, se ocupó entre 1691 y 1704 en investigar la naturaleza de cables perfectamente flexibles en equilibrio, sometidos a cargas arbitrarias. Aquí no servían los artificios de Leibniz y Juan Bernoulli, y desde luego, el viejo método de Huygens era excesivamente complicado. Jaime Bernoulli terminó por encontrar cuatro demostraciones independientes de las apropiadas ecuaciones diferenciales:

a) Mediante el equilibrio de fuerzas que actúan sobre un elemento infinitesimal.
b) Mediante el equilibrio de momentos actuando sobre un elemento infinitesimal.
c) A partir del principio de los trabajos virtuales.
d) A partir del principio de la energía potencial mínima.

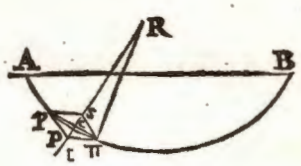
Las dos primeras demostraciones son las más importantes, pues por una parte, apuntan hacia la teoría general de las deformaciones, y por otra, muestran la equivalencia, para sistemas muy particulares, de los dos principios fundamentales de la mecánica.

Para obtener la ecuación de movimiento de la cuerda vibrante, cualquier estudiante sabe que basta aplicar "la segunda ley de Newton" a un elemento infinitésimo, o bien, si se desea mayor elegancia, aplicar a la ecuación estática de la catenaria el principio de la inversión de las aceleraciones dado por Jaime Bernoulli. Aplicando la segunda ley de Newton, Taylor en 1713 dedujo, si bien de manera confusa, una de las dos ecuaciones en derivadas parciales del movimiento finito de la cuerda (fig. 50). Pero al no tener idea de cómo manejarla, sólo pudo obtener el modo fundamental a través de un laberinto de conjeturas. Poco más consiguió en 1727 Juan Bernoulli cuando, siguiendo los pasos de Huygens, tomó por modelo la cuerda sometida a cargas discretas. No fue hasta 1746 que D'Alembert se percató de que la ecuación diferencial bastaba como expresión esencial de los principios mecánicos que rigen este sistema particular (fig. 51). Hubieron, pues, de transcurrir setenta años desde la publicación del *Principia* para que se creara un aparato matemático suficiente para poder reconocer como tal y utilizar un enunciado totalmente matemático del problema.

Al acabar Jaime Bernoulli su exhaustivo análisis de la catenaria, se encontraba en buena posición para abordar el problema mucho más complejo de la viga elástica. En este caso, el equilibrio de fuerzas y el equilibrio de momentos no son equivalentes, y además, el efecto de una parte de la viga sobre su vecina ha de representarse no sólo mediante una fuerza de contacto sino también mediante un par de contacto. Entre los años 1691 y 1694, Bernoulli siguió profundizando en sus investigaciones hasta llegar a obtener las ecuaciones diferenciales para la curva elástica, basándose principalmente en el equilibrio de momentos.

No se observa la más mínima influencia newtoniana en los estudios de Jaime Bernoulli, y sin embargo, la escuela inglesa tuvo un gran defensor en su sobrino Daniel, hijo de Juan Bernoulli. El fue quien aplicó por primera vez a una masa deformable la idea de Newton de que la fuerza resultante sobre un cuerpo, cualesquiera sean su geometría, naturaleza, y movimiento interno, es igual a la variación en el tiempo de su cantidad de movimiento total. En 1727, utilizando esta idea

Lemma 2.



In aliquo articulo vibrationis ſuæ induat Nervus tenſus, inter puncta A & B, formam curvæ cujusvis A p π B. Tum dico quod ſit incrementum velocitatis puncti alicujus P, ſeu acceleratio oriunda a vi tenſionis Nervi, ut curvatura Nervi in eodem puncto.

Demonſtr. Finge Nervum conſtare ex particulis rigidis æqualibus infinite parvis p P & P π, &c. & ad punctum P erige perpendicularem P R = radio curvaturæ in P, cui occurrant tangentes p t & π t in t, iis parallelæ π s & p s in s, & chorda p π in c. Tum, per Principia Mechanicæ, vis abſoluta, quâ urgentur particulæ ambæ p P & P π verſûs R, erit ad vim tenſionis fili, ut s t ad p t; & hujus vis dimidium, quo urgetur particula una p P, erit ad Nervi tenſionem, ut c t ad t p, hoc eſt, (ob triangula ſimilia c t p, t p R) ut t p vel P p ad R t vel P R. Quare, ob tenſionis vim datam, erit vis acceleratrix abſoluta ut $\frac{P\,p}{P\,R}$. Sed eſt acceleratio genita in ratione compoſitâ ex rationibus vis abſolutæ directè & materiæ movendæ inverſè; atq; eſt materia movenda ipſa particula P p. Quare eſt acceleratio ut $\frac{1}{P\,R}$, hoc eſt ut Curvatura in P. Eſt enim Curvatura reciprocè ut radius circuli oſculatorii. Q. E. D.

Fig. 50. Tratamiento dado por Brooke Taylor a la cuerda vibrante en el *Philosophical Transactions* núm. 337, 1714

$\alpha dt^2 : 2a = F\beta dt^2 : p\vartheta^2$, donc $\alpha = \frac{2aF\beta}{p\vartheta^2} = \frac{2apml\beta}{p\vartheta^2} =$ &c $\frac{2aml}{\vartheta^2}$.

VI. Nous remarquerons d'abord, que l'on peut repreſenter le tems donné θ par une ligne conſtante de telle grandeur que l'on voudra : il faudra ſeulement avoir ſoin de prendre, pour exprimer les parties variables & indeterminées du tems, des lignes t qui ſoyent à la ligne qu'on aura priſe pour marquer θ, dans le rapport de ces parties variables du tems au tems conſtant & donné, pendant lequel un corps peſant parcourt l'eſpace a. On pourra donc ſuppoſer θ telle, que $\vartheta^2 = 2aml$: & en ce cas on aura $\alpha = \beta$. Donc puiſque $dp = \alpha dt + \nu ds$, il faut que dq ou $\nu dt + \beta ds$ ſoit $= \nu dt + \alpha ds$.

VII. Pour déterminer par ces conditions les quantités α & ν, on remarquera, que comme $dp = \alpha dt + \nu ds$, & $dq = \nu dt + \alpha ds$, on aura $dp + dq = (\alpha + \nu) . (dt + ds)$; & $dp - dq = (\alpha - \nu) . (dt - ds)$. d'où il s'enſuit

1°, que $\alpha + \nu$ eſt egale à une fonction de $t + s$, & que $\alpha - \nu$ eſt egal a une fonction de $t - s$.

2°. Que par conſequent on aura $p = \frac{\Phi(t+s) + \Delta(t-s)}{2}$ ou ſimplement $= \Phi(t+s) + \Delta(t-s)$; & $q = \Phi(t+s) - \Delta(t-s)$, d'où l'on tire P M ou $s(p\,dt + q\,ds) = \Psi(t+s) + \Gamma(t-s)$, $\Psi(t+s)$ & $\Gamma(t-s)$ exprimant des fonctions encore inconnuës de $t + s$ & de $t - s$.

l'equation generale de la courbe eſt donc

$$y = \Psi(t+s) + \Gamma(t-s).$$

VIII.

Fig. 51. El trabajo de D'Alembert sobre la cuerda vibrante, mostrando la primera aparición de la ecuación en derivadas parciales, en las *Mémoires de l'Académie des Sciences*, Berlín, correspondientes al año 1747

consiguió calcular la fuerza ejercida sobre una pared por un chorro continuo de agua que incide sobre ella. Se podría describir esta investigación como una variación sobre un problema ya estudiado por Newton puesto que acaba por reproducir de nuevo el método newtoniano.

Daniel Bernoulli se encontró en *terra incognita* al comenzar a estudiar el movimiento del agua dentro de tubos, pues ni las obras de su tío ni las del propio Newton le sirvieron de ayuda alguna. Se vio entonces obligado a recurrir a un principio de impulso y energía más bien primitivo y poco convincente, principio que recuerda los tanteos de Newton en su búsqueda de la ley del momento lineal.

Hasta 1738 no fue publicada la ley hidráulica descubierta por Daniel Bernoulli en 1730. Fue entonces cuando su anciano padre, Juan Bernoulli, criticó el método deductivo que su hijo había seguido por considerarlo indirecto. Sugirió reemplazarlo por otro "basado tan sólo en principios dinámicos no impugnados por nadie". Estos principios son: 1) el cálculo de la diferencia de presiones internas actuando sobre caras opuestas de una rebanada de fluido, y 2) el principio del momento lineal. Toda esta investigación es contemporánea con la que D'Alembert llevara a cabo sobre la cuerda vibrante y comparte con ella el honor de haber publicado por vez primera la aplicación del equilibrio de fuerzas a todas las partes de un sistema de infinitos grados de libertad. Los análisis de Bernoulli y D'Alembert en realidad fueron precedidos por un estudio de Euler en el cual aparecen las ecuaciones que rigen el movimiento de la cuerda vibrante, obtenidas tomando el límite de la cuerda sometida a cargas discretas, pero fue éste publicado con fecha muy tardía.

Todo parece indicar que Newton y sus discípulos carecían de las herramientas teóricas necesarias para estudiar en profundidad el movimiento de los fluidos, ni el de los cuerpos flexibles tampoco. Pero ya por los años de 1740, los conceptos de la Estática habían progresado de tal manera que tres sabios fueron capaces, independientemente, de aplicar con precisión el principio del momento lineal a dos de los modelos más sencillos de cuerpos finitos que ofrece la Naturaleza.

Hasta esta fecha todos los avances se habían ido logrando a través del estudio de casos y sistemas particulares, como por ejemplo, el péndulo compuesto. Una vez alcanzado este nivel fue casi inmediata la generalización a un mayor número de coordenadas espaciales, y tuvo que ser Euler quien creara las teorías de la membrana flexible y de los fluidos perfectos.

5. Movimiento de un solido rigido, momento de la cantidad de movimiento, la curva elastica, y las Leyes de la mecanica de Euler

Tanto el principio del momento de la cantidad de movimiento como sus aplicaciones presentan una gran dificultad conceptual. Recordemos que no se mencionan ni en el *Principia* ni en los estudios que Huygens llevara a cabo sobre oscilaciones. A comienzos de 1700, las difíciles, más bien crípticas, monografías de Jaime Bernoulli acerca del péndulo y de la curva elástica eran las únicas referencias dignas de confianza. En el primer borrador de la *Mechanica* de Euler, redactado sobre 1730 pero que ha permanecido sin publicar[3] hasta 1965, se abandona apenas comenzado

[3] Euler, *Mechanica seu Scientia Motus,* págs. 93-224 en *Manuscripta Euleriana II,* editado por G. K. Mikhailov, Moscú y Leningrado, Izdat, Nauka, 1965. Véase Sectio III y en especial el último párrafo, § 648.

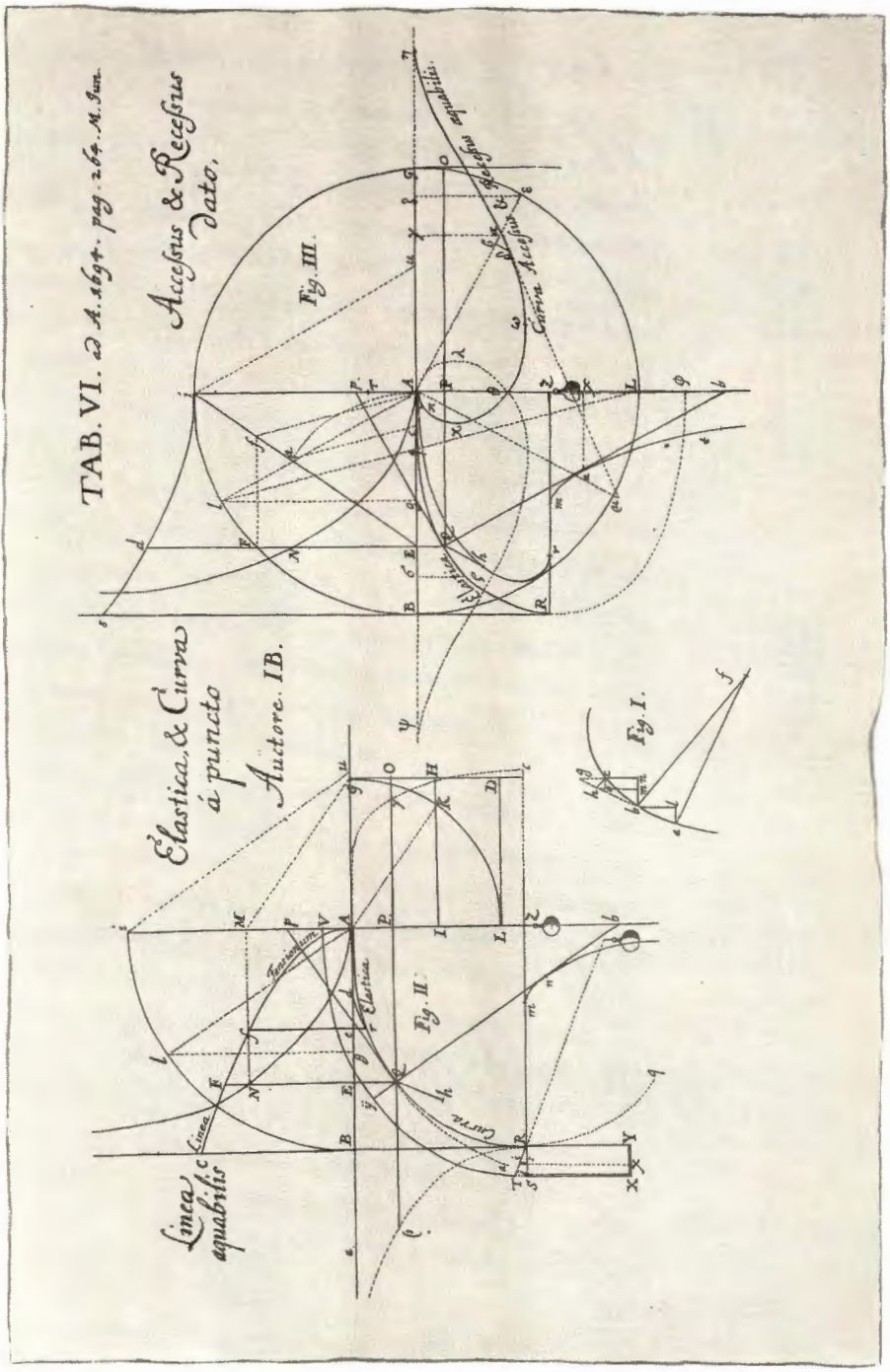


Fig. 52. Figuras de Jaime Bernoulli para explicar su tratamiento de la elástica, procedente del *Acta Eruditorum* para junio, 1694

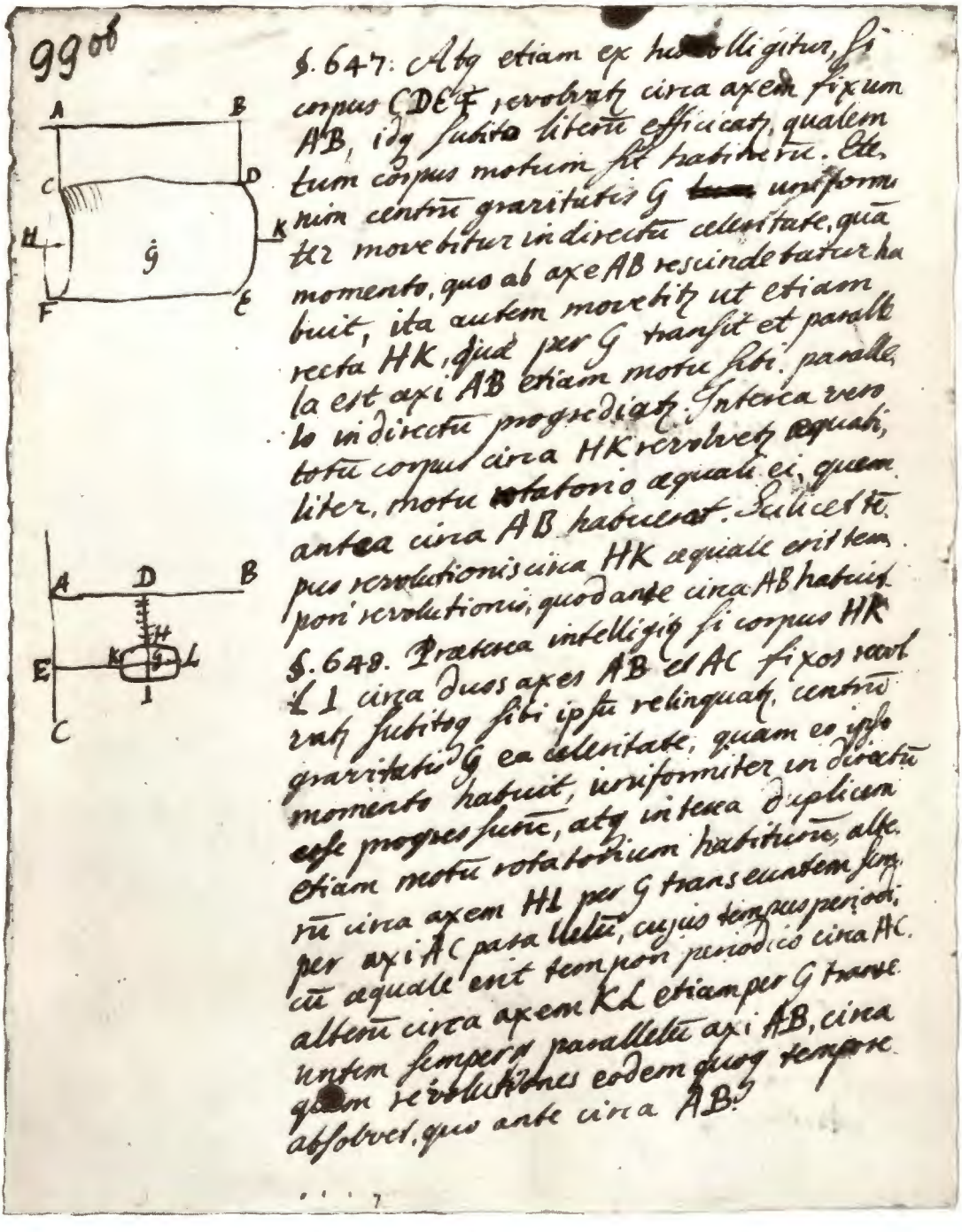


Fig. 53. Fin del manuscrito de la *Mechanica seu Scientia Motus,* de Euler, mostrando su infructuoso intento de tratar el movimiento de un cuerpo rígido, escrito alrededor de 1730, publicada por vez primera en 1965 (reproducido aquí de los Archivos de la Academia de Ciencias, Leningrado, por cortesía del Dr. G. K. Mikhailov)

un intento de determinar el movimiento de un cuerpo al que se le obliga primero a girar alrededor de dos ejes perpendiculares para dejarlo después en movimiento libre (fig. 53). En la versión definitiva[4] de 1734 encontramos que ha desaparecido toda referencia a los cuerpos rígidos. Entre Euler, Juan Bernoulli y Daniel Bernoulli se cruzó abundante correspondencia durante los años de la década de 1730, y en ella aparece a menudo la misma queja común: los "principios comunes" de la mecánica no bastaban para determinar el movimiento de un cuerpo rígido. Por aquel entonces ninguno de los tres era capaz de encontrar el principio general imprescindible, aunque bien es cierto todos llegaron de una u otra manera a obtener ecuaciones diferenciales del movimiento para sistemas físicos poco más generales que el cuerpo pendular de Huygens. Precisando aún más, se puede afirmar que nadie sabía cómo describir, y mucho menos calcular, el movimiento de un cuerpo rígido cuyo eje de rotación no estuviera restringido a un plano. En sus investigaciones acerca de la estabilidad de los barcos, Euler fue el primero en verse en la absoluta necesidad de resolver el problema del movimiento tridimensional de un sólido rígido. Se vio pues en el mismo atolladero que Newton en su estudio de un caudal hidráulico: para describir las pequeñas vibraciones de un cuerpo flotante, tuvo que abandonar todos los principios mecánicos conocidos y recurrir a la conjetura. Su "hipótesis"[5] fue afortunada: todo cuerpo rígido tiene tres ejes de rotación ortogonales entre sí, pudiendo oscilar libremente alrededor de cualquiera de ellos en un movimiento infinitesimal (figs. 54 *a, b*). Volveremos a hablar más adelante acerca de esta hipótesis.

El desarrollo de la teoría general del movimiento de los cuerpos rígidos fue mucho más lento que lo que los éxitos alcanzados por Huygens y Euler en los dos ejemplos ya expuestos pudieran hacernos suponer. El estudio de diversos problemas llevados a cabo por Euler y Daniel Bernoulli fue proporcionando la suficiente experiencia en el uso de distintas ideas mecánicas hasta indicar cuáles de éstas eran las más sencillas de aplicar. Hoy en día nadie se sorprenderá al saber que, de entre todas estas ideas, la más eficaz fue el principio de Jaime Bernoulli de considerar a las aceleraciones cambiadas de sentido como fuerzas por unidad de masa. Este principio también lo adoptó D'Alembert en 1743, si bien de forma menos clara. Como siempre, el análisis euleriano fue el más claro y directo y el propio Euler el primero en poner en claro que para ciertos sistemas mecánicos, en particular, aquellos formados por varillas rígidas articuladas entre sí, el principio del momento de la cantidad de movimiento ha de ser enunciada como una ley fundamental independiente. Las afirmaciones que acabo de hacer pueden inducir a equívocos pues se encuentran condicionadas por nuestros conocimientos *a posteriori*. Hoy en día nos parece evidente que en las investigaciones de Mecánica llevadas a cabo en la primera mitad del siglo XVIII, especialmente en las de Euler, se aplicaba una y otra vez el principio del momento de la cantidad de movimiento considerado como una consecuencia de la ley de las aceleraciones invertidas de Jaime Bernoulli aplicada a la antigua ley de la palanca. Ahora bien, al no haber sido enunciado todavía dicho principio del momento de la cantidad de movimiento, los geómetras de aquella época no se daban cuenta de que estuvieran aplicándolo. De hecho estaban *descubriendo* este principio, y descubriéndolo de la manera más comúnmente seguida en el hallazgo de leyes

---

[4] Euler, *Mechanica sive motus scientis analytice exposita*, Petropoli, 1736, 2 tomos = *Opera omnia II*, 1 y 2.

[5] Euler, *Scientia Navalis* . I (terminado en 1738), Petropoli, 1749 = *Opera omnia II*, 18, (1968). Véase § 184.

ita vt OC ſit diſtantia centri oſcillationis ab axe. Conſideremus autem corpus extra ſitum verticalem detruſum, eiusque centrum grauitatis in G, ita vt ipſi angulus GOC ſit deſcribendus, donec in ſitum aequilibrii pertingat. Vis autem, quae corpus ad hunc motum angularem ſollicitat, eſt pondus corporis quo in directione GH deorſum vrgetur. Sit nunc maſſa ſeu pondus corporis $= M$ eiusque momentum inertiae reſpectu axis per centrum grauitatis G tranſeuntis et axi oſcillationis paralleli $= S$ erit huius corporis momentum reſpectu axis oſcillationis $= S + M.OC^2$. Momentum autem grauitatis ad motum angularem circa O generand m eſt $M.GO.\text{ſin. }O$; ideoque vis gyratoria erit $= \frac{M.GO.\text{ſin. }O}{S+M.OC^2}$. Contemplemur nunc pendulum ſimplex og aequali angulo goc a ſitu verticali oc diſtans cui in g ponduſculum infinite paruum p ſit alligatum circa o oſcillans, erit vis gyratoria, qua ponduſculum p ad angulum goc abſoluendum animatur $= \frac{\text{ſin. }O}{OC}$. Si ergo haec vis gyratoria aequalis fuerit priori, pendulum ſimplex og et compoſitum OG ſimul in ſitum verticalem peruenient, quia vtrique aequalis angulus eſt percurrendus. Faciamus ergo $\frac{M.CO.\text{ſin. }O}{S+M.OC^2} = \frac{\text{ſin. }o}{oc}$ prodibit $oc = \frac{S+M.CO^2}{M.CO}$ quae eſt longitudo penduli ſimplicis iſochroni, ſeu diſtantia centri oſcillationis in pendulo compoſito OC ab axe oſcillationis, erit ergo centrum oſcillationis in Z, vt ſit $OZ = CO + \frac{S}{M.CO}$; Vnde apparet centrum oſcillationis perpetuo infra centrum grauitatis G cadere, eſſeque interuallum $CZ = \frac{S}{M.CO}$.

Hypotheſis.

Tab. XI. fig. 2.

184. In omnibus corporibus aquae innatantibus praecipue vero in nauibus concipere licet tres axes per centrum

Fig. 54a. La primera conjetura acerca de la existencia de los ejes principales de inercia, en la *Scientia Navalis* de Euler, terminada a eso de 1738, publicada en 1749

trum grauitatis G tranſeuntes inter ſe normales, primum verticalem ſcilicet CGI', ſecundum horizontalem AGB ſpinae RS parallelum, in plano diametrali ſitum ARSB et tertium EGF pariter horizontalem, ſi quidem nauis fuerit in ſtatu aequilibrii, et ad priorem AGB normalem. Deinde ponere licet corpus huiusmodi a viribus ſollicitantibus circa vnumquemque horum axium ita conuerti poſſe, vt motus gyratorius circa vnum horum axium non turbetur a motibus gyratoriis circa reliquos.

Scholion 1.

185. Ex ſuperioribus ſatis intelligitur corpus circa alium axem liberum et immotum gyrari non poſſe, niſi circa quem omnes vires centrifugae ſe deſtruant. Quamobrem ſi vires ſollicitantes corpus circa alium axem rotare conentur, motus orietur maxime irregularis, cum etiam axis inclinetur; quem motum definire difficillimum etiamnum eſt. Huic igitur incommodo medela afferetur, ſi talis motus irregularis reſolui poſſet in duos vel tres motus rotatorios circa axes fixos ſimul ſactos; tum enim cognito motu circa quemque axem ſeorſim, motus totus inde facile colligeretur. Quamuis autem haec reſolutio accurate non ſuccedat, tamen ſi ad praxin reſpiciamus, tuto ſatis adhiberi poterit, ſi tres illi axes inter ſe fuerint normales; tum enim motus circa vnum minime a motibus circa reliquos turbabitur. Praeterea vero ſi hi axes ita ſint comparati vt corpus circa quemli' et ſeorſim immotum gyrari queat, reſolutio iſta eo magis veritati erit conſentanea. In nauibus autem, ad quas hanc tractationem praecipue accomodare inſtitui, huiusmodi tres axes

Fig. 54b. Continuación de lo mismo

generales en la física teórica, a saber, mediante la generalización a partir de casos particulares, descartando las diferencias y conservando los rasgos comunes.

Surgieron tres problemas cruciales para el progreso de una mecánica general. Los tres exigen el hallazgo de ecuaciones diferenciales del movimiento para determinados tipos de cuerpos masivos:

1. Un cuerpo rígido.
2. Un fluido perfecto.
3. Una barra elástica.

Los tres problemas fueron resueltos por Euler. La primera etapa de su pensamiento le llevó a la idea de que el principio de la cantidad de movimiento podía expresarse de, una vez para todas, como un conjunto de ecuaciones diferenciales. No fue hasta 1747 que se dió cuenta, y fue el primero en darse cuenta, que para *todo* sistema discreto las ecuaciones del movimiento son de la forma (Fig. 55):

$$m_k \ddot{\boldsymbol{x}}_k = \boldsymbol{F}_k,$$

donde la fuerza $\boldsymbol{F}_k$ que actúa sobre el cuerpo k-ésimo viene dada. Los físicos suelen referirse a éstas como las "ecuaciones de Newton", aunque no aparecen en ninguna parte de la obra de Newton ni en la de nadie con anterioridad a 1747. Bien es verdad que hoy en día estas ecuaciones las vemos implícitas en las palabras de Newton, pero esto es una interpretación a posteriori.

Una vez que Euler tuvo esta idea, poco tardó en enunciar como la ley general única de la Mecánica (fig. 56):

$$\ddot{\boldsymbol{x}}\, dm = d\boldsymbol{F},$$

o bien, en la moderna notación de la integral de Stieltjes,

$$\int_{\mathscr{P}} \ddot{\boldsymbol{x}}\, dm = \boldsymbol{F}(\mathscr{P}),$$

donde $\boldsymbol{F}(\mathscr{P})$ es la fuerza resultante que actúa sobre una parte arbitraria $\mathscr{P}$ del cuerpo. Si nos preguntamos cómo pudo pasárseles por alto durante tanto tiempo esta ley a los científicos del siglo XVIII, cualquier posible respuesta habría de basarse en especulaciones y suposiciones imposibles de comprobar acerca de la manera de pensar de estos hombres. Lo que no se puede negar es que esta ley pasó inadvertida, por lo que sería infantil aceptar la tesis de Mach y de los historiadores tradicionales de la Física, que afirma el conocimiento universalmente extendido de las ecuaciones newtonianas independientemente de que hubieran sido escritas o no[6]. Un ejemplo

---

[6] Resulta instructivo leer lo que el propio Euler escribió cuando en 1747 comenzó, desde luego no por primera vez, el estudio del problema general del sistema planetario. "Para resolver estos problemas, emplearé un método un poco diferente del que han utilizado otros que han escrito sobre esta materia. En primer lugar, intentaban determinar la velocidad verdadera del cuerpo, a partir de la cual buscaban el movimiento en cada instante; y de esta velocidad, comparada con el espacio recorrido, determinaban el lugar donde debía aparecer el cuerpo en cada instante. Con el fin de evitar esta operación un tanto enojosa, y dado que en la astronomía nunca se desea la verdadera velocidad de los cuerpos celestes, he encontrado el medio de llegar directamente a una ecuación que relaciona el tiempo transcurrido con el lugar aparente del planeta... Finalmente, de acuerdo con mi método, no me veo obligado a tomar en cuenta la curvatura de la línea descrita por el cuerpo, y de esta manera evito mucha investigación laboriosa, sobre todo cuando el movimiento del cuerpo no tiene lugar, siquiera de modo aproximado, en el mismo plano. Se incluye esta gran ventaja en el siguiente *Lema*...

paralleles reſpectivement aux directions des trois coordonnées CP, PQ & QM. Que ces forces abſolues ou motrices ſoient

$$Mx = X;\ My = Y \ \&\ Mz = Z.$$

& poſant la maſſe du Corps $= M$, ces mêmes forces acceleratrices ſeront:

$$Mx = \frac{X}{M};\ My = \frac{Y}{M} \ \&\ Mz = \frac{Z}{M}.$$

Cela posé, prenant l'element du tems dt pour conſtant, le changement inſtantané du mouvement du Corps ſera exprimé par ces trois équations:

$$\text{I.}\ \frac{2ddx}{dt^2} = \frac{X}{M};\ \text{II.}\ \frac{2ddy}{dt^2} = \frac{Y}{M};\ \text{III.}\ \frac{2ddz}{dt^2} = \frac{Z}{M}$$

d'où l'on pourra tirer pour chaque tems ecoulé t les valeurs x, y, z, & par conſéquent l'endroit où le Corps ſe trouvera. C. Q. F. T.

Coroll. 1.

XIX. La viteſſe du Corps ſuivant la direction Mx ſera $= \frac{dx}{dt}$, ſuivant $My = \frac{dy}{dt}$ & celle ſuivant $Mz = \frac{dz}{dt}$, & cela enſorte que les quarrés de ces formules ſavoir $\frac{dx^2}{dt^2}$; $\frac{dy^2}{dt^2}$; $\frac{dz^2}{dt^2}$ expriment les hauteurs mêmes, qui conviennent à ces viteſſes. Et c'eſt à cauſe de ce rapport, que les formules differentio-differentielles ſont multipliées par le nombre 2.

Coroll. 2.

XX. Si les forces X, Y, Z, qui agiſſent ſur le Corps M, evanouïſſent, on aura ces équations:

$$\text{I.}\ ddx = 0;\ \text{II.}\ ddy = 0;\ \&\ \text{III.}\ ddz = 0.$$

qui étant integrées à cauſe de dt conſtant, donnent

I.

Fig. 55. El primer enunciado de las "ecuaciones Newtonianas" para sistemas discretos, en la memoria de Euler sobre mecánica celeste en las *Mémoires de l'Académie des Sciences*, Berlín, 1747

cette viteſſe ſoit egale à celle qu'un corps grave acquiert en tombant de la hauteur v, il faut prendre $\frac{dx^2}{dt^2} = v$, ou l'elément du tems ſera $dt = \frac{dx}{\sqrt{v}}$; d'où l'on connoit le rapport entre le tems t & l'eſpace x.

XXII. Comme cette formule ne détermine que l'eloignement ou l'approchement du corps par rapport à un plan fixe quelconque, pour trouver le vrai lieu du corps à chaque inſtant, on n'aura qu'à le rapporter en même tems à trois plans fixes, qui ſoient perpendiculaires entr'eux. Donc, comme x marque la diſtance du corps à un de ces plans, ſoient y & z ſes diſtances aux deux autres plans : & aprés avoir décompoſé toutes les forces qui agiſſent ſur le corps, ſuivant des directions perpendiculaires à ces trois plans, ſoit P la force perpendiculaire qui en réſulte ſur le premier, Q ſur le ſecond, & R ſur le troiſième. Suppoſons que toutes ces forces tendent à eloigner le corps de ces trois plans ; car en cas qu'elles tendent à le rapprocher, on n'auroit qu'à faire les forces negatives. Cela poſé, le mouvement du corps ſera contenu dans les trois formules ſuivantes:

I. $2M\,ddx = P\,dt^2$; II. $2M\,ddy = Q\,dt^2$; III. $2M\,ddz = R\,dt^2$.

XXIII. Si le corps n'eſt ſollicité par aucune force, de ſorte que $P = o$, $Q = o$, $R = o$, les trois formules trouvées, à cauſe de dt conſtant, ſe réduiront par l'intégration à celles-cy:

$$M\,dx = A\,dt; \quad M\,dy = B\,dt; \quad \& \quad M\,dz = C\,dt.$$

d'où l'on voit d'abord, que dans ce cas le corps ſe mouvra dans une ligne droite, avec un mouvement uniforme; & partant ces formules renferment en ſoi la premiere loi du mouvement, en vertu de laquelle tout corps étant en repos y demeure ; or étant en mouvement le corps continuë uniformément ſelon la même direction, à moins qu'il ne ſoit ſollicité par quelque force de dehors. Mais il eſt clair que nos

Fig. 56. El "Nuevo Principio de la Mecánica" de Euler, esto es, el principio general de la cantidad de movimiento, en las *Mémoires de l'Académie des Sciences*, Berlín, 1750

clave nos lo proporciona el movimiento más general de un cuerpo rígido, problema con el cual, como ya mencioné, Euler fue el primero en enfrentarse allá por la década de 1730, viéndose obligado, para poderlo resolver, a recurrir a una hipótesis *ad hoc,* bien que cautelosamente restringida a pequeños desplazamientos. Más tarde, cuando enunció su "nuevo principio de la Mecánica" (así lo llamaba en 1750), confirmó su utilidad aplicándolo al movimiento de un cuerpo rígido. Obtuvo así las ecuaciones diferenciales que llevan su nombre, cosa rara ya que la mayoría de sus descubrimientos no le son atribuidos. Poco después, consiguió demostrar como teorema su hipótesis original de quince años atrás según la cual en cualquier cuerpo existe una tríada de ejes ortogonales de rotación libre, quedando además este teorema libre de restricciones a pequeños desplazamientos.

Todos sabemos que las ecuaciones del movimiento de un cuerpo rígido expresan el equilibrio del momento de la cantidad de movimiento y no del momento lineal. Esto nos podría llevar a conjeturar que Euler, al igual que cualquier físico moderno, debería tener alguna hipótesis particular acerca de las fuerzas mutuas para explicar la rigidez de los cuerpos. Pero aquí falla la intuición pues durante la Ilustración ningún geómetra creador (y excluyo voluntariamente a Boscovich) introdujo jamás en el interior de un cuerpo otras fuerzas hipotéticas más que la gravedad, a menos de verse forzado a ello. En su lugar, Euler propuso un principio de exclusión: ya que un cuerpo nunca se pone espontáneamente en movimiento debido a cualesquiera fuerzas que pudiera haber en su interior, éstas no pueden contribuir al movimiento total del cuerpo. Hoy sabemos que este principio es en general falso, pero que para los cuerpos rígidos proporciona las ecuaciones correctas. Desde nuestra perspectiva actual vemos que, para descubrir las ecuaciones generales del movimiento de cuerpos rígidos, Euler utilizó un artificio para esquivar el principio del momento de la cantidad de movimiento. En esto siguió los pasos de Huygens en su deducción del centro de oscilación. Desgraciadamente, hay que hacer notar que el movimiento más general de los cuerpos rígidos planteaba un problema mecánico demasiado complejo para cualquier genio del siglo XVII.

El problema de la curva elástica es de aún mayor dificultad conceptual. En una de sus primeras investigaciones (1728), Euler había conseguido unificar, en lo concerniente al equilibrio, la catenaria y la curva elástica dentro de una única teoría. Evidentemente, el principio rector había de ser el equilibrio de momentos.

Lema

"XVIII. Si fuerzas arbitrarias actúan sobre un cuerpo *M,* determinar la modificación instantánea que producen estas fuerzas en el movimiento del cuerpo."

Como podrá ver el lector por su cuenta en la fig. 55, el resultado son las "ecuaciones newtonianas", numeradas allí I, II, III. Al parecer, Euler considera tan archisabido el *principio* expresado por estas ecuaciones que no requiere ni referencias ni demostración. Simplemente afirma las ecuaciones.

¿Cuáles son, pues, el "método un poco diferente" y la "gran ventaja"? De acuerdo con lo que escribe Euler, éstos consisten en la *concepción general,* la cual es nueva en que no requiere ninguna restricción ni artificios geométricos. Para aplicar en tres dimensiones la concepción intrínseca de Newton, Euler había tenido que construir una geometría diferencial de curvas alabeadas, y gran parte de su *Mechanica* trata de incómodas manipulaciones con respecto a lo que ahora llamaríamos curvatura y torsión. El "método un poco diferente" elimina la necesidad de todo esto.

Está claro que aquí no le dio Euler gran importancia a su innovación; lo atribuye únicamente a la comodidad matemática. Pero al tiempo es evidente que fue esta pequeña innovación la que al cabo de tres años le mostró el camino que no titubeó en llamar *principio nuevo* de la mecánica: el principio del momento lineal para cada elemento de volumen de un cuerpo arbitrario que ocupa un espacio.

Estos dos sistemas son de tal naturaleza que, aunque sigue siendo válido, no es necesario tomar en cuenta el equilibrio de fuerzas. Ahora bien, el obtener las ecuaciones del movimiento es problema de muy distinta índole, pues mientras que la naturaleza de las fuerzas de contacto es irrelevante para la consideración del equilibrio, tiene su importancia en problemas que atañen al movimiento.

Para ahondar en este terreno, Euler disponía también de sus anteriores estudios de hidrodinámica aunque éstos podían servir tanto para guiarle como para despistarle. Una vez que hubo simplificado y generalizado, entre 1750 y 1751, las teorías hidráulicas de Daniel y Juan Bernoulli, Euler se encontraba en excelente posición para extender estas ideas hasta incluir a los cuerpos fluidos tridimensionales. Poco antes (1749) D'Alembert había escrito con motivo de un concurso científico un ensayo enrevesado y oscuro en el que se encuentran algunas ecuaciones correctas para determinar flujos rotacionalmente simétricos o planos, bien que sumergidas dentro de un maremágnum de filosofía, conjeturas, comentarios infantiles y errores crasos. Por la misma época, Euler se ocupaba de estos problemas y de otros de índole aún más general. Su línea de argumentación fue típicamente clara y precisa. Comenzó por introducir el concepto de presión en el seno de un fluido, es decir, la acción que ejerce la porción de fluido que se encuentra a un lado de una superficie frontera imaginaria trazada en el seno del mismo sobre la porción correspondiente al otro lado. Al suponer que esta fuerza de contacto es perpendicular a la superficie de separación, independientemente del estado de movimiento del fluido, y aplicando su forma diferencial del principio del momento lineal, pudo Euler obtener las ecuaciones básicas de la hidrodinámica en unas pocas cuartillas. La tradición de los Bernoulli le había enseñado cómo calcular la fuerza resultante sobre un elemento unidimensional y su cálculo de derivadas parciales le permitió extender este resultado a tres dimensiones.

Los modos simples de las vibraciones infinitesimales de las barras rectas y elásticas ya habían sido hallados por Daniel Bernoulli y Euler en su juventud, incluso antes de que existieran ecuaciones de movimiento. La ecuación parcial en derivadas parciales para pequeños desplazamientos fue rápidamente obtenida por este último desde el momento en que dispuso del principio general del momento lineal. Pero los movimientos finitos planteaban un problema de mayor dificultad.

Después de haber estudiado este problema de una manera intermitente a lo largo de cincuenta años, Euler descubrió la solución tan simple como eficaz. La clave de esta solución consiste en considerar al principio del momento de la cantidad de movimiento como una *ley fundamental de la mecánica* y en no especificar ni la magnitud ni la dirección de las fuerzas y pares de contacto. De esta manera consiguió escribir en 1771 las ecuaciones generales de la mecánica para un cable plano deformable. A partir de aquí le resultó muy sencillo enunciar el principio del momento de la cantidad de movimiento en su forma más general:

$$\int_{\mathscr{P}} \boldsymbol{p} \times \ddot{\boldsymbol{x}}\, dm = \boldsymbol{L}(\mathscr{P}),$$

donde $\boldsymbol{p}$ es el vector de posición y $\boldsymbol{L}$ es el par total aplicado a una parte $\mathscr{P}$ del cuerpo y que incluye pares de contacto si éstos fueran necesarios. En su memoria de 1775, aparecen ambos principios como fundamentales e independientes: para toda parte de un cuerpo cualquiera, la fuerza total que actúa sobre la misma es igual a la variación en el tiempo de la cantidad de movimiento total y el par total es igual a la variación en el tiempo del momento de la cantidad de movimiento total, donde

aquellos pares que sean momentos de fuerzas han de considerarse con respecto al origen de p, siendo este origen un punto fijo. Estas dos proposiciones constituyen las *leyes del movimiento de* Euler. Hay que tener en cuenta que la naturaleza de las fuerzas actuantes, y en particular la de las fuerzas de contacto, varía de unos cuerpos a otros. Este mismo distingo ya lo había hecho Jaime Bernoulli en 1705 pero no pudo desarrollarlo a falta de unos principios generales correctos. Desde nuestro punto de vista actual podríamos decir que al comenzar el siglo XVIII, el formalismo matemático del espacio tridimensional no estaba lo suficientemente evolucionado como para permitir razonamientos físicos claros y precisos acerca de cuerpos masivos tridimensionales. Por fin, con la citada memoria de 1775, surge claramente todo el esquema de la mecánica racional. Dentro de tal esquema se presentan las dos leyes generales *comunes a todos los cuerpos,* pero que resultan ser insuficientes para determinar sus movimientos. Las *diferencias* que distinguen unos cuerpos de otros vienen incorporadas en unas *ecuaciones constitutivas,* las cuales rigen la respuesta de cada cuerpo a su medio ambiente. Las ecuaciones constitutivas estudiadas en el siglo XVIII definieron el sistema de puntos discretos, el cuerpo rígido, el cable perfectamente flexible, la lámina perfectamente flexible, el cable elástico, el fluido perfecto y algunos otros sistemas de menor importancia. Todos estos sistemas encontraron su lugar dentro del esquema euleriano el cual habría de servir de guía para toda la Mecánica durante los cien años siguientes.

6. LA *Méchanique Analitique* DE LAGRANGE Y REACCIONES POSTERIORES

No podemos pasar por alto la *Méchanique Analitique* de Lagrange, publicado en 1788. En esta obra el axioma básico de la Estática viene dado por el principio de los trabajos virtuales, el cual se enuncia de manera explícita y con bastante generalidad (fig. 57). La Dinámica se obtiene aplicando el principio de las aceleraciones cambiadas de sentido de Bernoulli-Euler. Este axioma combinado se suele atribuir a D'Alembert, pero el mismo Lagrange, afirma, y con justicia, que su enunciado de hecho sustituye con ventaja al alambicado principio que D'Alembert había propuesto como fundamento general de la Mecánica.

Se han escrito casi tantas sandeces acerca de la *Méchanique Analitique* como del *Principia* o del *Dos Nuevas Ciencias.* Aunque el libro de Lagrange es mucho más comprensible que los de Newton o Galileo, parece que la mayoría de los actuales historiadores de la ciencia no encuentran su lectura lo suficientemente fácil como para poder descubrir sus secretos. El libro contiene pocos errores, pocas novedades, y muchos cálculos rutinarios. Aparecen también comentarios históricos interesantes, pero la exposición que hace de la Mecánica es puramente algebraica sin que se expliquen conceptos utilizados ni se incluyan aclaraciones por medio de diagramas o ejemplos trabajados en el texto; tampoco se justifican los pasos al límite mediante procesos matemáticos rigurosos. El tratado no toca bastantes de los campos abiertos por Newton ni menciona a muchos de los más intrincados problemas resueltos por los geómetras basilienses en el siglo anterior. En particular, no trata el principio general del momento de la cantidad de movimiento, lo que se explica puesto que del principio de los trabajos virtuales, no se puede seguir el del momento de la cantidad de movimiento hasta no haber explicitado en cierto grado la naturaleza de las fuerzas de contacto. Tendría que nacer Cauchy y crear el concepto genérico de esfuerzo

tems les eſpaces parcourus par le corps m ſuivant les lignes p, q, r, &c. Donc $mP \times \delta p$, $mQ \times \delta q$, $mR \times \delta r$, &c, ſeront les *momens* des forces mP, mQ, mR, &c, agiſſantes ſuivant ces mêmes lignes, p, q, r, &c.

Or la formule générale de l'équilibre conſiſte en ce que la ſomme des *momens* de toutes les forces du ſyſtême doit être nulle (Part. I, Sect. 2, art. 2); donc on aura la formule cherchée en égalant à zéro la ſomme de toutes les quantités

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)$$
$$+ m\,(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \&c),$$

relatives à chacun des corps du ſyſtême propoſé.

7. Donc ſi on dénote cette ſomme par le ſigne intégral S, qui doit embraſſer tous les corps du ſyſtême, on aura

$$S\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \&c.\right)m$$

pour la formule générale du mouvement d'un ſyſtême quelconque de corps, regardés comme des points, & animés par des forces accélératrices quelconques P, Q, R, &c.

Pour faire uſage de cette formule, on ſuivra les mêmes regles que pour la formule de l'équilibre; ainſi il faudra appliquer ici tout ce qui a été dit dans la ſeconde Section de la premiere Partie, depuis l'article 3 juſqu'à la fin, en obſervant que les différentielles marquées par la note ou caractériſtique δ dans la formule précédente répondent aux différentielles marquées par la caractériſtique ordinaire d dans la formule de l'équilibre, & ſe déterminent par les mêmes regles & les mêmes opérations.

Fig. 57. El principio general de los trabajos virtuales según el enunciado dado por Lagrange en la *Méchanique Analitique*, 1788

gracias al cual pueden unificarse todas las teorías sobre cuerpos masivos tri-dimensionales.

Como ya hemos dicho, la *Méchanique Analitique* evita algunos importantes problemas que el *Principia* planteara un siglo antes, problemas que permanecían sin resolver e incluso algunos sin estudiar. La teoría de las ondas superficiales infinitesimales esperaba la llegada de Laplace, Kelland, y Airy quienes habrían de deducirla a partir de las ecuaciones de Euler para la mecánica de fluidos. Las ideas newtonianas acerca de la fricción en el seno de un fluido serían recogidas por Navier y Stokes. Este último se dió cuenta del error que contenía la solución propuesta por Newton para el caso de un cilindro en rotación y pudo corregirla. Ahora bien, el problema de la esfera en rotación sigue sin resolver hasta la fecha. Borda obtuvo (1766) mediante un ingenioso artificio una solución particular para el flujo de salida de un fluido por un orificio; más tarde este problema lo atacarían con éxito Kirchhoff y Helmholtz, basándose en la hidrodinámica euleriana bien que restringiéndose a un plano. Hay que decir que la teoría tri-dimensional apenas si está esbozada hoy en día. De la misma manera hagamos notar que aunque D'Alembert y Euler dedujeron ecuaciones de onda para gases y sólidos flexibles, la primera explicación satisfactoria de la velocidad de sonido experimentalmente observada aparece durante los primeros años del siglo XIX, y que una teoría suficientemente amplia para incluir el hecho de que los sonidos de mayor volumen se refuerzan mientras que los más débiles se apagan, se descubrió hace tan sólo un año por Coleman y Gurtin.

7. Equivocos decimononicos acerca de la obra y el programa newtonianos. La postura de Faraday.

Habiéndoseme pedido que hablase acerca de las reacciones al *Principia,* he de agradecer la asignación de una tarea que me permita un enfoque más sencillo que el que han escogido la mayoría de los demas conferenciantes. Con respecto a este tema, son casi irrelevantes los documentos no publicados puesto que tan sólo los historiadores de hoy, y no los científicos de tiempos de Newton ni de ningún otro, han tenido alguna oportunidad para reaccionar ante los mismos. Con el fin de examinar las reacciones a las obras publicadas de Newton, en primer lugar he de corregir algunos equívocos comunes acerca de cuáles fueron en realidad los logros y el programa newtonianos en física. Un equívoco tal, adelantado durante el siglo dieciocho por unos pocos intérpretes que no pueden incluirse entre los científicos creadores y posteriormente adoptado por casi todos los físicos e historiadores del siglo diecinueve para acá, es que Newton insistía que toda la filosofía natural debía fundarse en cálculos de fuerzas centrales.

Fueran las que fueran las especulaciones que Newton prefirió no publicar, las obras que sí presentó no justifican que se le impute una visión tan estrecha de la naturaleza. En primer lugar, tal imputación habría de descansar principalmente sobre una frase del prefacio al *Principia* y sobre los comentarios al final de las Preguntas en la *Opticks.* Es posible que el peso exagerado tan a menudo concedido a estas páginas refleje el hecho de que un matemático acaso necesite un día entero para llegar a entender una sola página del *Principia,* pero desde entonces lo domina sin lugar a dudas, mientras que cualquiera podría leer las preguntas en diez minutos y seguir discutiéndolas durante una eternidad. Las Preguntas no son ciencia; a lo más son profecías de la ciencia. Muestran una faceta de Newton que normalmente conte-

nía y que hubiera hecho mejor en reprimir del todo. Su interés radica tan sólo en el mero hecho de que fue el propio Newton quien las escribió. En segundo lugar, aun si hemos de perder el tiempo con estas descarnadas especulaciones, en justicia no podemos atribuirles un atomismo en el sentido restringido posteriormente dado a la palabra. Los imaginados átomos newtonianos eran "sólidos, masivos, duros, impenetrables, móviles". De estos cinco adjetivos, tres no son puntuales. La repulsión experimentada por dos granos sólidos, duros e impenetrables, por pequeños que sean, cuando chocan entre sí, no es una acción a distancia sino una fuerza de contacto. No obstante el tratamiento tosco que les diera, las fuerzas de contacto en ninguna parte son excluidas por Newton. Sus estudios de las olas del agua, de la efusión y de la resistencia de un fluido continuado se basan en conceptos, bien que difusos, de fuerzas de contacto, no entre corpúsculos sino en un medio infinitamente divisible. Las partículas newtonianas son "aún tan durísimas, como para nunca gastarse ni romperse en pedazos". No puede negarse la rotura a menos de que haya pedazos en los que romperse. Las "partículas" son "particulae", esto es, pequeñas partes, no masas puntuales; llenan una pequeña región, la cual contiene infinitos puntos. No niego que por aquí y por allá proclamara Newton una visión atomista de la naturaleza, pero igualmente veo que en su propia *práctica* estaba muy lejos de adherirse sin excepciones a los 39 Artículos a que quisieran atarle, con la hagiografía de un Reverendo Weems, tanto los periodistas decimonónicos como los actuales compiladores de textos. Incluso en el enunciado explícito de la tercera ley del movimiento del *Principia,* donde sólo se mencionan fuerzas entre pares de "cuerpos", no exige Newton que sean centrales. Así pues, al corear que el electromagnetismo destruyó los puntos de vista newtonianos, quisieran los físicos imponerle un programa que acaso había sido alguna vez el de ellos, mas no del propio Newton.

Demasiado a menudo sucede que los escritos sobre la historia de la ciencia proclaman y desarrollan una antítesis entre ciencia "newtoniana" y "antinewtoniana" durante el siglo diecinueve, empleando como caballo de batalla la supremacía de las fuerzas centrales interatómicas. No niego que tuvieran las fuerzas centrales sus secuaces y sus oponentes apasionados, pero entre estos entusiastas no encuentro más teóricos matemáticos que los de segunda fila o bien, lo que es más frecuente, meros periodistas de la ciencia. Los grandes matemáticos que nos dieron la física "clásica" no encajan en ninguna de estas categorías. Cauchy y Poisson crearon teorías de sólidos alternativamente como conjuntos de centros puntuales y como plenos, y demostraron que ambos modelos eran más o menos equivalentes. Maxwell creó tanto la teoría cinética de los gases como la teoría electromagnética del éter, demostrando, por cierto, que en su teoría cinética jamás se podría obtener mediante procedimientos matemáticos correctos ningún resultado incompatible con la concepción de un gas como continuo. Estos hombres se destacan cual titanes por encima de los vanos especuladores que pretendían todo y nada pudieron demostrar para sus átomos y sutiles fluidos. No se podría afirmar de ninguno de los tres que fuera "newtoniano" ni "anti-newtoniano" en el sentido de los historiadores. Mas como su predecesor Euler, llevaban el manto de Newton. A Euler a menudo se le considera, y con cierta justicia, como defensor de la metafísica cartesiana; no obstante, en su *práctica* de la mecánica fue el más fiel de los discípulos últimos de Newton, pues hizo suyas, depuradas mediante la abstracción y fijadas por la aplicación explícita y exacta, todas las ideas más fructíferas de éste y uniéndolas con las ideas de Jaime Bernoulli, formó lo que hoy conocemos bajo el nombre de "mecánica clásica". De hecho, lo que los físicos todavía denominan "mecánica newtoniana" tiene poca

relación directa con la obra del propio Newton sino que, más bien, es una combinación de la mecánica euleriana con la de Lagrange.

La herencia de la ciencia no puede identificarse con su historia. Cometemos una injusticia a un gran científico si tan sólo hacemos la crónica de sus visiones y sus actos, o incluso si estimamos la suma aritmética de toda su obra científica. Si escamoteamos el propio juicio, insultamos a la diosa que pretendemos adorar. Así como es cierto que aquel que escriba la historia de Carlos II de Inglaterra no tiene por qué ser un experto tenista ni mantener un costoso harén cosmopolita, es, por el contrario, probable que aquel que se enfrente con Newton sin haber experimentado por su cuenta la neurosis del pensamiento científico, la pervertida éxtasis solitaria de creación, y los aristocráticos duelos polémicos en la cima[7], no se aproxime más a la verdadera ciencia de Newton que lo que pudieron el pobre e infantil Brewster o Rigaud. Esta diferencia es esencial, incluso en el caso de que tan sólo sea que el historiador puede más cómodamente imaginarse en las zapatillas de un Carlos II coronado por una guirnarla de flores que no en el "espacio absoluto, ...siempre igual e inmóvil" de un Newton con únicamente las fluxiones de aquel ecuable fluente, el "tiempo absoluto, verdadero y matemático", para acompañarle. Carlos II está del todo muerto. El científico no muere así. Newton está vivo hoy, al igual que el Hadamard y el Birkhoff que algunos hemos conocido en persona, y el Hilbert que todos conocemos a través de sus discípulos. Newton está vivo, no en las yermas especulaciones de las Preguntas, sino en las sólidas y permanentes páginas matemáticas del *Principia,* en el programa que allí nos trazó e ilustró con brillantes ejemplos, y en el gran concepto nuevo que allí nos enseñó a emplear.

En primer lugar, el programa. A menudo citada, mas invariablemente mal interpretada está la frase del propio Newton, "Untinam caetera Naturae phaenomena ex principiis Mechanicis eodem argumentandi genere derivare liceret." Es correcto traducir "ex principiis Mechanicis" como "a partir de principios mecánicos", pero sólo en el sentido vago y comprensivo que poseía la palabra "mecánica" durante el siglo diecisiete, como ya lo ha explicado el Sr. Hill. Muchos, por el contrario, leen este pasaje como si Newton hubiese querido decir "a partir de principios mecánicos" en el sentido de la mecánica de los físicos decimonónicos, a saber, "a partir de mis propias tres leyes del movimiento". Valiéndose de una cita de Congreve de 1697, el *Oxford Dictionary* da para una de sus definiciones del vocablo "mecánico" lo siguiente: "aquello que funciona como una máquina, que posee una acción maquinal". Otra aceptación que da, apoyándose en una cita de 1663 es: "aquello que actúa o se realiza sin el ejercicio del pensamiento ni de la volición". Y por último, da también la definición: "lo práctico en contraposición a lo especulativo", con la siguiente cita de un libro matemático de 1570: "Un Mecánico especulativo... no difiere en nada de un Matemático Mecánico." El uso por parte de físicos e historiadores de la palabra "mecánico" como algo distinto de "óptico", "electromagnético", etc., es un fenómeno demasiado reciente para mencionarse siquiera en el *Dictionary,* que sólo se le aproxima en la antítesis a "químico", al citar un ejemplo de un siglo entero después de los tiempos de Newton. Este, por su parte, aún considerando a la fuerza como una idea "mecánica", también mencionó fuerzas "eléctricas" y "magnéticas". Así pues, el "vacío" electromagnético de Maxwell,

---

[7] Véanse las observaciones de Sr. Manuel, las cuales, contrastadas con aquellas de Sr. Hill, puede que sirvan para recordarnos de que en la época de Carlos II y Newton, bendita por Apolo y por Venus, no existió ni de palabra ni de concepto, lo "normal" de la filosofía iatropsicológica.

Hertz, y Lorentz es tan consonante con el newtoniano "ex principiis Mechanicis eodem argumentandi genere" como lo fueron los éteres ponderables de las especulaciones tempranas y tardías del propio Newton[8].

El aspecto del programa newtoniano que menos se aprecia en los estudios históricos es precisamente aquel sobre el cual el pensador había concedido mayor peso, a saber, que era *matemático, rigurosamente* matemático. La palabra "matemático" aparece ya en el título y frecuentemente a lo largo del texto, siempre escrita con la "M" mayúscula. Ya en el prefacio, después de recordarnos la vieja distinción entre la mecánica racional y la práctica, continúa Newton: "Puesto que, sin embargo, los artífices acostumbran obrar con poca precisión, la *mecánica* ha llegado a distinguirse así de la *geometría,* de tal manera que todo lo que sea preciso se clasifica como *geometría,* y todo lo que sea menos preciso, como *mecánica.* No obstante, los errores son de los artífices, no del arte. Aquel que obra menos precisamente es el mecánico menos perfecto, y si alguien pudiera obrar con la máxima precisión, ése sería el mecánico más perfecto de todos." Prosiguiendo con una explicación de la naturaleza de la geometría, al final concluye: "La *Geometría,* pues, está fundada en la práctica mecánica y no es otra cosa que aquella parte de la *mecánica universal* que expone y demuestra el arte de medir con precisión... La *Mecánica Racional* será la ciencia de los movimientos que resulten de cualesquier fuerzas, y de las fuerzas que se requieren para cualesquier movimientos, expuesta y demostrada con precisión." Aquellos que interpreten el lema "ex principiis Mechanicis eodem argumentandi genere" como algo que únicamente se refiere a la frase siguiente acerca de fuerzas entre las partículas desatienden no sólo la página que le precede, de la que acabo de dar algunos extractos, sino las diez líneas inmediatamente anteriores, donde en la descripción de su libro nos habla Newton de "nuestros principios matemáticos de la filosofía", "proposiciones demostradas matemáticamente", y "proposiciones matemáticas" –tres referencias a demostraciones matemáticas. "El mismo tipo de razonamiento" significa sencillamente *demostrado mediante una matemática rigurosa a partir de axiomas matemáticos.* Así pues, tomado en su conjunto, el prefacio de Newton expresa claramente cuál fue su programa: construir una filosofía natural *matemática,* en la cual la geometría es tan sólo la parte más sencilla si bien una muestra perfecta de método.

Hubo, ciertamente, reacciones hostiles en contra de este programa, en especial

---

[8] Continúa Newton en este pasaje, "Pues muchas cosas me llevan a sospechar un poco que todas puedan depender de ciertas fuerzas mediante las cuales las partículas de los cuerpos, por causas todavía no conocidas, son impulsadas unas hacia otras y se enlazan entre sí según figuras regulares, o bien son rechazadas y se apartan unas de otras..." Es corriente la traducción de la frase "secundum figuras regulares" como "*en* figuras regulares", como si Newton hubiese sugerido formaciones geométricas de átomos, cuando de hecho no es tan específica la frase y podría referirse simplemente al uso de determinadas funciones matemáticas, como a menudo le sucedía a la expresión "figuras geométricas" en aquella época. La "figura" clásica significa no sólo "forma, perfil, figura" sino también "cualidad, tipo, especie, naturaleza, manera", y en los escritos de Galileo y otros, se dice "figuras geométricas" para describir o especificar una situación donde un autor actual emplearía el término "función". Así pues, pienso yo que los propios esfuerzos de Newton para describir los flujos de un fluido "continuado" en el Libro II implican coherencia de "las partículas de los cuerpos... según figuras geométricas", aunque no hacen uso de átomos ni fuerzas centrales. En realidad, el propio Newton llega a decir prácticamente lo mismo en el Prefacio, donde entre las "potencias naturales" que tratará, incluye "la resistencia de fluidos y fuerzas de esa índole, sean atractivas o repulsivas...", y menciona no sólo el Libro I sino el II también como pertenecientes a su programa general. Las fuerzas de coherencia y resistencia en cuerpos que ocupan un espacio sí satisfacen el principio de "acción y reacción", aunque en general no son fuerzas centrales.

entre los poetas y músicos de comienzos del movimiento romántico, según ya ha mencionado Sr. Haskell. Aparecen plenamente expresadas estas reacciones en la autobiografía de Berlioz. Pero el hecho es que tuvieron poco efecto sobre el rumbo de la propia física. La mayor parte de la evidencia a favor de contribuciones a ésta por parte de teóricos no matemáticos de la física se basa en concepciones erróneas acerca de la naturaleza de la matemática. A menudo se repite frívolamente y fuera de su contexto histórico el repudio de Faraday, sin recordar que para él, que al igual que un matemático moderno, trataba directamente con conceptos y operaciones precisas y abstractas, la palabra "matemática" se refería únicamente al álgebra ritual de los pedagogos durante el período más estéril de la matemática británica, cuando se había permitido que el ciego empleo de las letras *x, y, z* y *a, b, c* conectadas entre sí por signos más y menos, usurpase el vocablo que anteriormente significaba y de nuevo en la actualidad significa la teoría precisa de relaciones y conjuntos.

Dado que, a pesar de las buenas intenciones y los esfuerzos de sus estudiosos, la literatura de la historia y la filosofía de la ciencia permanece infecunda debido a su credulidad en cuanto a la naturaleza y función de la matemática, introduzco aquí ciertas observaciones hechas por Maxwell en el prefacio a la primera edición de su *Tratado:* "A medida que proseguía con el estudio de Faraday, percibí que su método de concebir los fenómenos era también matemático, si bien no expuesto en la forma convencional de símbolos matemáticos... Los métodos de Faraday se asemejaban a aquellos en los que partimos del todo para llegar mediante análisis a las partes... Encontré también que varios de los métodos de investigación más fértiles descubiertos por los matemáticos podrían expresarse mucho mejor en términos de ideas derivadas de Faraday que en su forma original." Un estudioso actual de la filosofía natural acaso resumiría la diferencia así: Faraday prefería enunciados globales de las leyes físicas, pero dado que todavía no existían las herramientas matemáticas necesarias para explotarlos localmente (transformación de Green, etc.), la matemática suya parecía distinta de aquella ya expresada en forma simbólica y comúnmente enseñada. Tan sólo dos generaciones después, Maxwell construyó con facilidad métodos para transformar entre sí enunciados locales y globales. En tiempos de Hilbert comenzó a apreciarse la plena potencia del punto de vista global de tal manera que en la actualidad el teórico creador prefiere el empleo de principios globales siempre que le sea posible encontrarlos. Por tanto, la historia *real* de la ciencia, la ciencia que vive y se desarrolla, sostiene el juicio maxwelliano de que Faraday como teórico fue ciertamente un matemático, y uno de los grandes. (No todos los grandes matemáticos dominan *todos* los aspectos de la matemática cultivada en su día. Algunos miran más hacia el futuro que al pasado.) Aquellos historiadores que aducen a Faraday como ejemplo de teórico no matemático y por tanto, rebelde al programa newtoniano, no sólo no alcanzan a entender qué es la matemática sino que cometen una gran injusticia contra el propio Faraday. Ellos le juzgan en términos de la matemática de su época, pero él por su parte, al igual que otros grandes teóricos, mejor podría defender su causa ante el tribunal superior de los matemáticos de *nuestro* día. Bien podría servir Faraday de prueba, caso de que tal hiciera falta, de que los sumos sacerdotes matemáticos de cualquier período dado rara vez son los mejores matemáticos del mismo[9].

---

[9] *Nota añadida a la redacción.* Puede que quepa cierta esperanza de que se nieguen los científicos a dejar pasar, por negligencia, las concepciones erróneas acerca de la historia de sus

Así como ciertos programas permanecen en su condición de tales, aun cuando sean proyectados por un hombre del calibre de un Newton, y pueden así pisarse cual guijarros en la senda de las buenas intenciones, otros, en cambio, se erigen firmes como síntesis de una praxis. Además de muchos de aquellos, nos dejó Newton uno de estos últimos. Por la mitad del *Principia,* escribió, a modo de apéndice a algunos de sus éxitos más brillantes, "Eodem sensu generali usurpo vocem impulsus, non species virium & qualitates physicas, sed quantitates & proportiones Mathematicas in hoc Tractatu expendens: ut in Definitionibus explicui. In Mathesi investigandae sunt virium quantitates & rationes illae, quae ex conditionibus quibuscunque positis consequentur: deinde ubi in Physicam descenditur, conferandae sunt hae rationes cum Phaenomenis ut innotescat quaenam virium conditionis singulis corporum attractivorum generibus competant. Et tum demum de virium speciebus, causis, & rationibus physicis tutius disputare licebit." "En el mismo sentido genérico adopto la palabra 'impulso', ponderando en este tratado no especies de fuerzas y cualidades físicas, sino cantidades y proporciones matemáticas, según expliqué en las definiciones. En la matemática hay que investigar las cantidades de las fuerzas y tales reglas que se sigan de cualesquier condiciones que se hayan impuesto. Siempre que descendamos de allí a la física, estas reglas han de compararse con los fenómenos con el fin de revelar qué condiciones de las fuerzas responden a los diversos tipos cuerpos atractivos." Termina Newton con un comentario burlón, característico de él: "Y entonces, finalmente, será más sólida la discusión acerca de las especies, causas, y reglas físicas de las fuerzas." Implica que tal discusión no nos llevará a ninguna parte, pero que no importa puesto que el trabajo real, la matemática, está ya hecho, de manera que el resto es lo que se quiera. No obstante su teología y su filosofía, ésta es la gran lección que Newton nos legó: hay que olvidarse de las "causas" —sea cual sea el significado que tenga este extraño vocablo— y aferrarse a las relaciones entre los fenómenos. En realidad, la idea de "causa" no es más que un sostén verbal para principiantes que no captan el concepto matemático de función. No estaba solo Newton a la hora de proyectar este programa. En el curso de una investigación concreta sobre elasticidad, escribió Leibniz, "his paucis consideratis, tota haec materia redacta sit ad puram Geometriam, quod in physicis & mechanicis unice desideratum." "Habiendo sido consideradas estas pocas cosas, la materia entera se reduce a pura geometría, que es el único propósito de la física y la mecánica."

8. El legado de Newton

Aquellos que consideran al siglo dieciocho como un período en el que se quedó parada la ciencia newtoniana cometen todavía el error de identificar "newtoniano" con "británico". Aquellos que lo encuentran una época estéril en cuanto a la física no llegan a aprender del ejemplo de Newton y Leibniz. Así como en primer lugar,

---

propios campos que se afana por crear la nueva y profesionalizada historia de la ciencia, debido a su negativa a reconocer que la ciencia todavía está viva. En su número de septiembre, 1967, la revista de temas generales, *Endeavour,* publicó un editorial conmemorativo sin firmar que en una sola página presenta una visión de Faraday mejor fundamentada que una reciente biografía completa, vg. "Es un hecho notable el que a pesar de saber Faraday poco más que aritmética simple y de pretender ver poca necesidad de la matemática, claramente poseía una especie de intuición matemática que le guió sin apenas faltas a través de los nuevos campos que abrió."

la física libera a la filosofía de algunos de sus cuidados, en la segunda etapa, la matemática reduce a un mínimo la física de una clase dada de fenómenos, con lo que permite a los físicos enfocar sus especulaciones hacia otra parte. En breve, el propósito es eliminar toda la física que sea innecesaria, lo que es la mayor parte. Ningún hombre antes ni después de Euler logró jamás poner una gama tan amplia de física bajo el control de teorías matemáticas concretas, explícitas y definitivas como lo que hizo éste. Lo llevó a cabo tan brillantemente que ni siquiera se le da crédito por la mayoría de sus descubrimientos, siendo éstos enseñados a todos y tomados por los físicos actuales como algo evidente o matemático y por tanto, al parecer, dado por Dios en el momento de su nacimiento. La obra de Euler encaja de lleno dentro de los programas científicos de Newton y Leibniz, y sus principios específicos de la mecánica reunen los de éstos en cuanto a sus rasgos comunes, los desechan en lo que respecta a sus diferencias, y los refunden en conceptos nuevos e incluyentes.

El segundo gran legado que hemos recibido de Newton, el legado concreto, es el concepto de fuerza dada *a priori.* Solo y de modo imperfecto llegó Newton a la comprensión de que no bastan lugar, tiempo, cuerpo, movimiento, y masa para una correlación decente de los fenómenos, de que es menester otro elemento primitivo. Como ha comentado el Sr. Cohen, los "vires" newtonianos que aparecen en los enunciados de sus leyes son gránulos[10] de impulso, y no fuerzas tal y como las concebimos hoy en día. De acuerdo con otra observación del Sr. Cohen, expresada de manera ligeramente distinta, las propias leyes de Newton, tomadas estrictamente, son insuficientes siquiera para obtener lo que él pretendía demostrar a partir de ellas, y mucho menos para servir de base para la "mecánica clásica". Costó medio siglo dieciocho para convertir al cálculo inventado por Leibniz en la lengua franca de la ciencia física y así despejar el camino para que Euler nos enseñase a andar derechos sin necesitar como sostén a minúsculos impulsos ni otros gránulos tan oscuros como imprecisos. El concepto de fuerza resistió más tiempo. No fue hasta el año 1960 que por vez primera se propusieran por Noll axiomas matemáticos claros y suficientes para sistemas de fuerzas, al nivel de los axiomas de Hilbert para puntos y líneas y los de Carathéodory para distribuciones de masa. Y todavía están siendo revisados estos axiomas por Noll y otros.

No es por frivolidad que haya aducido investigaciones muy recientes a la hora de describir las reacciones al *Principia.* Espero que no esté fuera de lugar mencionar a distinguidos filósofos e historiadores de la ciencia que la mecánica clásica, la mecánica difusamente llamada "newtoniana", no es el cadáver que a menudo se le imagina ser. El Sr. Stein me ha dado ánimos al aludir a la posibilidad de niveles superiores de concepto y precisión para el espacio-tiempo clásico. El refinamiento y la extensión del concepto de fuerza es una de las áreas centrales de investigación en la mecánica racional de cuerpos deformables de hoy. Aquí estamos en deuda a más de uno de los gigantes. Del *Principia* de Newton aprendieron nuestros antepasados cómo emplear el concepto de fuerza dada *a priori.* La estructura integrada por ese concepto lo debemos a muchos grandes matemáticos; entre los fundadores, Newton es acompañado de Huygens, Leibniz, y Jaime Bernoulli, y el gran arquitecto es Euler.

---

10 Aquellos que con gesto triunfante señalan a estos gránulos como evidencia de que concibiera Newton a toda la naturaleza como corpuscular bien podrían imponerse la tarea de explicar por qué no cortó en trocitos, de manera análoga, a su espacio absoluto y tiempo ecuable.

REFERENCIAS

La mayor parte aunque no todas las obras mencionadas en esta conferencia se analizan y se les asignan referencias en las tres introducciones mías a tomos de L. Euleri *Opera Omnia.* Para el centro de oscilación, entre otras cosas, véanse:

1. Jouguet, E., *Lectures de Mécanique,* París: Gauthier-Villars, 2 tomos, 1908-1909.

2. Dugas, R., *La Mécanique au XVIIe Siècle,* Griffon, 1954.

Con respecto al principio del momento de la cantidad de movimiento, ver el quinto ensayo de este tomo, y para el concepto de esfuerzo, el cuarto. Aunque sea costumbre referirse al texto de Mach, he de decir que, en lo que respecta a todas las materias tratadas en esta conferencia, la exposición suya no es nada exacta.

NOTA BIBLIOGRAFICA

Esta conferencia se leyó en la celebración del tricentenario de Newton que se hizo en 1966 en la Universidad de Texas, Austin, y ha sido publicada en la memoria correspondiente en *The Texas Quarterly,* 1967. Agradezco al profesor R. Palter su permiso para volverla a imprimir aquí.

La segunda mitad de la conferencia se compuso durante el curso de las sesiones de la reunión, como puede deducirse de las referencias que se hacen a varios otros conferenciantes: profesores I. Bernard Cohen, Francis Haskell, Christopher Hill, y Frank E. Manuel, y Dr. Howard Stein.

IV. LA CREACION Y EL DESARROLLO DEL CONCEPTO DE ESFUERZO

1. LAS LEYES DEL MOVIMIENTO DEBIDAS A CAUCHY (1822)

El día 30 de septiembre de 1822, anunció Cauchy el *principio de esfuerzos*, el cual, a partir de aquel momento, ha sido el fundamento de la mecánica racional de medios continuos (fig. 58). Afirma este principio que sobre cualquier superficie lisa, cerrada y orientable $\partial\mathscr{V}$, bien sea una superficie imaginada en el interior del cuerpo o bien la superficie de contorno del propio cuerpo, existe un campo integrable de *vectores de tracción* $\boldsymbol{t}_{\partial\mathscr{V}}$, equipolente a la acción ejercida por la materia exterior a $\partial\mathscr{V}$, y contigua a la misma, sobre aquella (materia) interior a $\partial\mathscr{V}$ (véase fig. 59). Así, la *fuerza total* $\boldsymbol{F}(\mathscr{V})$ y el *par total* $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}_0}(\mathscr{V})$ que actúan sobre la materia en la región $\mathscr{V}$, englobada por $\partial\mathscr{V}$, vienen dados por las expresiones:

$$\boldsymbol{F}(\mathscr{V}) = \int_{\partial\mathscr{V}} \boldsymbol{t}_{\partial\mathscr{V}}\, ds + \int_{\mathscr{V}} \boldsymbol{b}\, dm, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{x}_0}(\mathscr{V}) = \int_{\partial\mathscr{V}} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \wedge \boldsymbol{t}_{\partial\mathscr{V}}\, ds + \int_{\mathscr{V}} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \wedge \boldsymbol{b}\, dm, \tag{2}$$

donde ds y dm indican integración con respecto al área superficial y a la masa, respectivamente, y donde $\boldsymbol{b}$ es la fuerza de volumen por unidad de masa. Las fuerzas y los pares que actúan sobre un cuerpo son, pues, de dos tipos: aquellos que son funciones absolutamente continuas de la masa, y aquellos que son funciones absolutamente continuas del área de la superficie de contorno. El término "de volumen" se aplica a aquéllos, mientras que se emplea el de "esfuerzo" o "de contacto" para éstos. La mecánica racional de materiales es la teoría de las fuerzas de contacto.

Cauchy supone que la tracción $\boldsymbol{t}_{\partial\mathscr{V}}$ depende de la superficie $\partial\mathscr{V}$ únicamente a través de la normal $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{t}_{\partial\mathscr{V}} = \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{n}}, \tag{3}$$

de modo que todos los cuerpos cuyas superficies de contorno tengan una normal común $\boldsymbol{n}$ en un punto cualquiera sufren la misma tracción allí. Apelando al principio del momento lineal, demuestra a continuación que $\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{n}}$ cambia de signo cuando se cambia la orientación de $\partial\mathscr{V}$:

$$\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{n}} = -\boldsymbol{t}_{-\boldsymbol{n}}, \tag{4}$$

o lo que es lo mismo, la tracción ejercida por el interior sobre el exterior es igual y contraria a aquella ejercida por el exterior sobre el interior. Empleando este resultado, llamado el *lema de Cauchy*, de nuevo aplicando el principio del momento lineal, demuestra que si $\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{n}}$ se supone una función continua de $\boldsymbol{n}$, entonces es una función lineal homogénea de $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n}. \tag{5}$$

libre du plan élastique, avait considéré deux espèces de forces produites, les unes par la dilatation ou la contraction, les autres par la flexion de ce même plan. De plus, il avait supposé, dans ses calculs, les unes et les autres perpendiculaires aux lignes ou aux faces contre lesquelles elles s'exercent. Il me parut que ces deux espèces de forces pouvaient être réduites à une seule, qui devait constamment s'appeler tension ou pression, et qui était de la même nature que la pression hydrostatique exercée par un fluide en repos contre la surface d'un corps solide. Seulement la nouvelle pression ne demeurait pas toujours perpendiculaire aux faces qui lui étaient soumises, ni la même dans tous les sens en un point donné. En développant cette idée, j'arrivai bientôt aux conclusions suivantes.

Si dans un corps solide élastique ou non élastique on vient à rendre rigide et invariable un petit élément du volume terminé par des faces quelconques, ce petit élément éprouvera sur ses différentes faces, et en chaque point de chacune d'elles, une pression ou tension déterminée. Cette pression ou tension sera semblable à la pression qu'un fluide exerce contre un élément de l'enveloppe d'un corps solide, avec cette seule différence, que la pression exercée par un fluide en repos contre la surface d'un corps solide, est dirigée perpendiculairement à cette surface de dehors en dedans, et indépendante en chaque point de l'inclinaison de la surface par rapport aux plans coordonnés, tandis que la pression ou tension exercée en un point donné d'un corps solide contre un très-petit élément de surface passant par ce point, peut être dirigée perpendiculairement ou obliquement à cette surface, tantôt de dehors en dedans, s'il y a condensation, tantôt de dedans en dehors, s'il y a dilatation, et peut dépendre de l'inclinaison de la surface par rapport aux plans dont il s'agit. De plus, la pression ou tension exercée contre un plan quelconque se déduit très-facilement, tant en grandeur qu'en direction, des pressions ou tensions exercées contre trois plans rectangulaires donnés. J'en étais à ce point, lorsque M. Fresnel, venant à me parler des travaux auxquels il se livrait sur la lumière, et dont il n'avait encore présenté qu'une partie à l'Institut, m'apprit que, de son côté, il avait obtenu sur les lois, suivant lesquelles l'élasticité varie dans les diverses directions qui émanent d'un point unique, un théorème analogue au mien. Toutefois le théorème dont il s'agit était loin de me suffire pour l'objet que je me proposais, dès cette époque, de former les équations générales de l'équilibre et du mouvement intérieur d'un corps; et c'est uniquement dans ces derniers temps que je suis parvenu à établir de nouveaux principes propres à me conduire à ce résultat, et que je vais faire connaître.

Du théorème énoncé plus haut, il résulte que la pression ou tension en chaque point est équivalente à l'unité divisée par le rayon vecteur d'un ellipsoïde. Aux trois axes de cet ellipsoïde correspondent trois pressions ou tensions que nous nommerons *principales*, et l'on peut

Fig. 58. La primera declaración del principio de esfuerzos por Cauchy en el *Bulletin de la Société Philomathique*, 1823

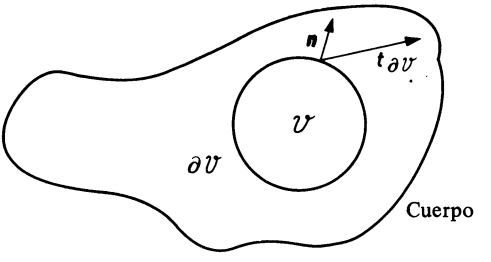


Fig. 59. La tracción $t_{\partial \mathscr{V}}$ actuando sobre la superficie de contorno $\partial \mathscr{V}$ de una región $\mathscr{V}$ ocupada por una parte de un cuerpo

Esto es, sobre el espacio de vectores existe una transformación lineal $\boldsymbol{T}$, llamada *tensor de esfuerzos,* cuya operación sobre la normal exterior unitaria a $\partial \mathscr{V}$ en un punto dado da lugar al vector de tracción en dicho punto. En particular, de acuerdo con los términos empleados por el propio Cauchy, las tracciones actuando sobre tres planos perpendiculares entre sí en un punto cualquiera determinan de modo unívoco las tracciones sobre todo plano que pase por dicho punto. La existencia del tensor de esfuerzos a menudo se denomina el *teorema fundamental de Cauchy.* Empleando esto en (1), Cauchy demuestra entonces que en un punto interior a una región donde en un instante fijo es continuamente diferenciable el campo tensorial $\boldsymbol{T}$, donde $\boldsymbol{b}$ es continua, y donde existe y es continua la aceleración $\ddot{\boldsymbol{x}}$, el principio del momento lineal en un sistema de referencia inercial es equivalente a la ecuación en derivadas parciales:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{T} + \varrho \boldsymbol{b} = \varrho \ddot{\boldsymbol{x}}, \tag{6}$$

siendo ϱ la densidad másica, también supuesta continua. Después demuestra que bajo los mismos supuestos, cuando se satisface (6), el principio del momento de la cantidad de movimiento es equivalente a:

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^{T}. \tag{7}$$

Por tanto, es simétrico el tensor de esfuerzos. Estas dos ecuaciones, (6) y (7), son la *primera y segunda leyes del movimiento de Cauchy.* Si admitimos los principios del momento lineal y del momento de la cantidad de movimiento, la primera ley de Cauchy afirma que la resultante fuerza de contacto por unidad de volumen es $\operatorname{div} \boldsymbol{T}$, mientras que la segunda es una condición necesaria y suficiente para que el par de contacto resultante sea el momento de la fuerza de contacto resultante.

Para la moderna mecánica de continuos estas dos leyes a veces son insuficientemente generales. En primer lugar, no siempre es una hipótesis adecuada el que, como se afirma en (2), todos los pares sean momentos de fuerzas, dado que puede haber pares de contacto y pares de volumen, y también, en relación con materiales orientados, puede resultar necesario introducir esfuerzos de orden superior, momento angular de spin, y así sucesivamente. En segundo lugar, el supuesto de funciones lisas necesario para obtener las leyes de Cauchy puede resultar excesivamente restrictivo. Una larga secuencia de investigaciones sobre ondas de choque y otras discontinuidades fuertes, empezando con casos particulares tratados por Fourier, Poisson, Stokes, Rankine, Hugoniot, Hadamard, y Zemplén, llevó por fin a un teorema general debido a Kotchine (1926), el cual, cuando se aplica al principio

del momento lineal, siendo la fuerza resultante dada por (1), da lugar a la condición de salto:

$$[\boldsymbol{t}_{\partial\mathscr{V}} + \varrho U\dot{\boldsymbol{x}}] = \mathbf{0}. \tag{8}$$

Aquí los corchetes denotan un salto de una cara a la otra de una superficie singular en el lugar particular considerado, U es la velocidad local de propagación[1] de la superficie, y $\dot{x}$ es el campo de velocidades. La condición (8) es necesaria y suficiente para que, siendo la fuerza resultante dada por el principio de esfuerzos de Cauchy, se mantenga el principio del momento lineal en todo entorno del punto al cual se refiere. Así pues, no expresa ninguna idea nueva sino que es más bien el resultado de aplicar matemáticamente el principio de esfuerzos a un caso donde las hipótesis usuales de lisura serían demasiado restrictivas. El principio del momento de la cantidad de movimiento, con tal de que el par resultante venga dado por (2), también es equivalente, en una superficie singular, a la condición de Kotchine.

No hablaré aquí de estas generalizaciones y extensiones; tampoco presentaré las demostraciones de Cauchy, las cuales se han reproducido multitud de veces, en efecto si no siempre en detalle, en los libros de texto, ni citaré sus palabras en apoyo de su tesis. Son tan claros, directos y elegantes los trabajos de Cauchy en este campo que, de describirlos el historiador, acaso haría un deservicio al lector al desviarle de su lectura por cuenta propia (figs. 60, 61). Claramente esta obra de Cauchy marca uno de los grandes hitos de la mecánica y la física matemática, a pesar de que pocos escritores sobre la historia de dichas disciplinas parecen haberse dado cuenta de ello[2]; es un punto clave que bien podría compararse con la teoría del péndulo de Huygens, la teoría newtoniana del sistema solar, la teoría euleriana del fluido perfecto, y las teorías de Maxwell sobre el gas monoatómico y el campo electromagnético.

Del hecho de que no resulta evidente el principio de esfuerzos puede convencerse cualquier profesor al intentar enseñarlo a sus alumnos. En la actualidad, como ya no se incluye la mecánica de medios continuos en la formación de los físicos, aumentan el número de jóvenes especialistas en campos tales como la física del estado sólido y la mecánica estadística de los fluidos que se encuentran del todo perdidos en sus intentos de llegar a entender siquiera las ideas clásicas acerca de la mecánica de sólidos y fluidos, sobre todo debido a su falta de dominio del concepto aparentemente sencillo de esfuerzo. En esta conferencia deseo mostrar cómo un aspecto principal de la intuición mecánica, la sutil idea de esfuerzo, llegó a desarrollarse a lo largo de los siglos.

2. El tema de esta conferencia

Mi propósito aquí es señalar las etapas conceptuales que actualmente reconocemos como predecesoras de la gran idea unificadora de Cauchy. Pocas de éstas se

---

[1] Dicho con más precisión, los valores de U^+ y U^- que se emplean cuando se hace explícita la condición (8) son los valores límite de la velocidad local de propagación cuando se aproxima uno a la superficie singular desde las caras denotadas por + y −.

[2] En un reciente y atractivo tomo que expone el progreso de la física durante el siglo diecinueve, no le ha parecido necesario al autor, un profesional de la historia de la ciencia, mencionar los nombres de Cauchy ni Stokes. De idéntico parecer era Mach.

$$(6)\quad \begin{cases} \mathcal{E} = p_3(\cos\lambda_3\cos\alpha_1 + \cos\mu_3\cos\beta_1 + \cos\nu_3\cos\gamma_1), \\ \mathcal{D} = p_3(\cos\lambda_3\cos\alpha_2 + \cos\mu_3\cos\beta_2 + \cos\nu_3\cos\gamma_2), \\ \mathcal{C} = p_3(\cos\lambda_3\cos\alpha_3 + \cos\mu_3\cos\beta_3 + \cos\nu_3\cos\gamma_3). \end{cases}$$

Si maintenant on substitue, dans les équations (4), (5), (6), les valeurs de $p_1\cos\lambda_1$, $p_1\cos\mu_1$, etc..., tirées des équations (1), (2), (3), on obtiendra les six formules

$$(7)\quad \begin{cases} \mathcal{A} = A\cos^2\alpha_1 + B\cos^2\beta_1 + C\cos^2\gamma_1 + 2D\cos\beta_1\cos\gamma_1 + 2E\cos\gamma_1\cos\alpha_1 + 2F\cos\alpha_1\cos\beta_1, \\ \mathcal{B} = A\cos^2\alpha_2 + B\cos^2\beta_2 + C\cos^2\gamma_2 + 2D\cos\beta_2\cos\gamma_2 + 2E\cos\gamma_2\cos\alpha_2 + 2F\cos\alpha_2\cos\beta_2, \\ \mathcal{C} = A\cos^2\alpha_3 + B\cos^2\beta_3 + C\cos^2\gamma_3 + 2D\cos\beta_3\cos\gamma_3 + 2E\cos\gamma_3\cos\alpha_3 + 2F\cos\alpha_3\cos\beta_3; \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} \mathcal{D} = A\cos\alpha_2\cos\alpha_3 + B\cos\beta_2\cos\beta_3 + C\cos\gamma_2\cos\gamma_3 \\ \quad + D(\cos\beta_2\cos\gamma_3 + \cos\beta_3\cos\gamma_2) + E(\cos\gamma_2\cos\alpha_3 + \cos\gamma_3\cos\alpha_2) + F(\cos\alpha_2\cos\beta_3 + \cos\alpha_3\cos\beta_2), \\ \mathcal{E} = A\cos\alpha_3\cos\alpha_1 + B\cos\beta_3\cos\beta_1 + C\cos\gamma_3\cos\gamma_1 \\ \quad + D(\cos\beta_3\cos\gamma_1 + \cos\beta_1\cos\gamma_3) + E(\cos\gamma_3\cos\alpha_1 + \cos\gamma_1\cos\alpha_3) + F(\cos\alpha_3\cos\beta_1 + \cos\alpha_1\cos\beta_3), \\ \mathcal{F} = A\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + B\cos\beta_1\cos\beta_2 + C\cos\gamma_1\cos\gamma_2 \\ \quad + D(\cos\beta_1\cos\gamma_2 + \cos\beta_2\cos\gamma_1) + E(\cos\gamma_1\cos\alpha_2 + \cos\gamma_2\cos\alpha_1) + F(\cos\alpha_1\cos\beta_2 + \cos\alpha_2\cos\beta_1). \end{cases}$$

Ces six formules fournissent le moyen de calculer les projections algébriques des pressions p_1, p_2, p_3, supportées par trois plans perpendiculaires entre eux, sur trois demi-axes perpendiculaires à ces mêmes plans, quand on connaît les projections algébriques des pressions supportées par trois plans parallèles aux plans coordonnés sur les axes des x, y, z.

Observons encore que, les demi-axes OL, OM, ON étant perpendiculaires l'un à l'autre, on aura, en vertu de formules connues,

$$(9)\quad \begin{cases} \cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1, & \cos\beta_1\cos\gamma_1 + \cos\beta_2\cos\gamma_2 + \cos\beta_3\cos\gamma_3 = 0, \\ \cos^2\beta_1 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\beta_3 = 1, & \cos\gamma_1\cos\alpha_1 + \cos\gamma_2\cos\alpha_2 + \cos\gamma_3\cos\alpha_3 = 0, \\ \cos^2\gamma_1 + \cos^2\gamma_2 + \cos^2\gamma_3 = 1, & \cos\alpha_1\cos\beta_1 + \cos\alpha_2\cos\beta_2 + \cos\alpha_3\cos\beta_3 = 0. \end{cases}$$

Par suite on tirera des équations (4), (5), (6)

Fig. 60. El teorema fundamental de Cauchy sobre el tensor de esfuerzos, tomado de sus *Exercices de Mathématiques*, Tomo 4, 1829

signant par $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ les projections algébriques de la force accélératrice qui serait capable de produire à elle seule le mouvement effectif d'une particule, et prenant x, y, z, t pour variables indépendantes, on obtiendra, à la place des équations (1), celles qui suivent

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dA}{dx}+\dfrac{dF}{dy}+\dfrac{dE}{dz}+\rho X=\rho\mathfrak{X}, \\ \dfrac{dF}{dx}+\dfrac{dB}{dy}+\dfrac{dD}{dz}+\rho Y=\rho\mathfrak{Y}, \\ \dfrac{dE}{dx}+\dfrac{dD}{dy}+\dfrac{dC}{dz}+\rho Z=\rho\mathfrak{Z}. \end{cases}$$

Enfin, si l'on nomme ξ, η, ζ les déplacements de la particule qui, au bout d'un temps t, coïncide avec le point (x, y, z), mesurés parallèlement aux axes coordonnés, on trouvera, en supposant ces déplacements très-petits,

$$\mathfrak{X}=\frac{d^2\xi}{dt^2},\quad \mathfrak{Y}=\frac{d^2\eta}{dt^2},\quad \mathfrak{Z}=\frac{d^2\zeta}{dt^2},$$

et par conséquent les équations (2) deviendront

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{dA}{dx}+\dfrac{dF}{dy}+\dfrac{dE}{dz}+\rho X=\rho\dfrac{d^2\xi}{dt^2}, \\ \dfrac{dF}{dx}+\dfrac{dB}{dy}+\dfrac{dD}{dz}+\rho Y=\rho\dfrac{d^2\eta}{dt^2}, \\ \dfrac{dE}{dx}+\dfrac{dD}{dy}+\dfrac{dC}{dz}+\rho Z=\rho\dfrac{d^2\zeta}{dt^2}. \end{cases}$$

Les formules (1), (2), (3) sont les véritables équations d'équilibre ou de mouvement intérieur des corps considérés comme des masses continues; et pour en déduire, par exemple, les lois de l'équilibre ou du mouvement des corps solides élastiques, il suffit de chercher comment, dans ces derniers, les pressions ou tensions A, B, C, D, E, F doivent s'exprimer à l'aide des déplacements ξ, η, ζ. Nous ferons, à ce sujet les remarques suivantes.

Soient, au bout du temps t, α, β, γ les angles que forme avec les demi-axes des coordonnées positives une droite menée par le point (x, y, z), et représentons par s la dilatation ou condensation linéaire s, mesurée suivant cette droite. On aura, en supposant que les déplacements ξ, η, ζ soient très-petits,

Fig. 61. La primera ley del movimiento de Cauchy para medios continuos, según se enuncia en sus *Exercices de Mathématiques*, Tomo 4, 1829

mencionaron por el propio Cauchy, y quizás es que no las conocía. De hecho, citó únicamente el trabajo de Fresnel dirigido hacia una teoría de la elasticidad cristalina para explicar la reflexión y refracción de la luz, y una teoría de Navier en la cual las fuerzas internas en una placa deformada se consideraban como debidas a cambios en el volumen y las curvaturas. Estas eran las investigaciones recientes de colegas suyos que Cauchy creyó necesario mencionar haberlas visto. Naturalmente, no se sintió obligado a atribuír a ninguna persona en concreto tales materias que hubiese escogido del fondo común de los geómetras de su época. En la historia de las ideas, es tan importante, si no más, el progreso del anónimo dominio común como los destacados puntos de desviación del mismo. Es sobre todo a este progreso que deseo puntualizar.

La teoría general de los medios continuos se desarrolló a partir de casos particulares, cada uno de los cuales era una teoría de un tipo particular de continuo, particular en lo que respecta a las propiedades o la geometría. Las diversas posibilidades geométricas difieren en dimensión y curvatura:

1. Unidimensional
   a) recta
   b) curva
2. Bidimensional
   a) plana
   b) curva
3. Tridimensional

Aunque son infinitamente diversas las propiedades materiales, antes de la época de Cauchy solamente se había considerado a cuatro tipos lo suficiente como para darles formas matemáticas concretas:

0. Rígido
1. Fluido
2. Flexible (de 1 ó 2 dimensiones sólo)
3. Elástico

El primero de estos no tiene ninguna utilidad en cuanto al concepto de esfuerzo. Contando las restantes combinaciones, se obtienen catorce posibles clases particulares de teorías, si bien no todas ellas se lograron antes de la teoría general del esfuerzo. En particular, la teoría tridimensional de la elasticidad lineal se obtuvo por vez primera más o menos al mismo tiempo por Fresnel, Navier, el propio Cauchy, y Poisson, con sólo pequeñas diferencias de enfoque, alcance, y claridad. Los éxitos obtenidos anteriormente en las otras posibilidades variaban desde completo en los casos de tubos unidimensionales de fluido, cables flexibles, y bandas elásticas a ninguno en el de placas elásticas curvas. Son los éxitos a los que quiero seguir aquí, pero no hemos de olvidar que ciertos éxitos, especialmente aquellos logrados en circunstancias demasiado particulares, apartan al estudiante de la verdadera teoría general en vez de guiarle hacia ella.

3. El papel central de la hidrodinamica de Euler (1750-1755). Lo que logro, lo que oscurecio

Está claro que uno de los fundamentales elementos constructivos en el fondo de

ideas de que disponía Cauchy fue la hidrodinámica de Euler, que contaba ya con unos setenta-y-cinco años de existencia. Esta fue la primera teoría tridimensional correcta de un material deformable. Para obtenerla de la teoría general de Cauchy, sólo nos hace falta suponer que la tracción $\boldsymbol{t}_n$ es normal a la superficie sobre la cual actúa:

$$\boldsymbol{t}_n = -p\boldsymbol{n}, \tag{9}$$

donde al campo escalar p se le denomina la *presión.* Obviamente, (5) entonces requiere que:

$$\boldsymbol{T} = -p\mathbf{1}, \tag{10}$$

donde $\mathbf{1}$ es el tensor unitario. Con ello, la primera ley de Cauchy (6) se reduce a la *ecuación dinámica de Euler:*

$$-\operatorname{grad} p + \varrho\boldsymbol{b} = \varrho\ddot{\boldsymbol{x}}, \tag{11}$$

y claro está, se satisface automáticamente la segunda ley de Cauchy (7). Menciono la hidrodinámica ahora porque sirve de punto medio de nuestro estudio, y gran parte de los trabajos anteriores que trataremos puede captarse con más facilidad si consideramos a éstos como preliminares a la teoría euleriana del "fluido perfecto", la cual había de dejarlos en última instancia anticuados o al menos subordinados.

Vista como mera sucesión de símbolos, es improbable que la euleriana ecuación dinámica para fluidos sugiera la lección máxima que aprendieron Cauchy y otros de ella. Esta fue que el modo de tratar el movimiento de un cuerpo consiste en imaginariamente cortarlo en dos partes, un interior y un exterior, y en representar la acción entera del exterior sobre el interior mediante campos definidos sobre la frontera entre ambos. Este es el llamado *principio de corte de Euler.* Una idea de su importancia puede obtenerse de cierto pasaje famoso de la *Mechanics* de Osgood, pág. 102. "Lo primero que hay es *un sistema material...*, y después sobre este sistema actúan fuerzas."

AISLAR EL SISTEMA

"El primer hombre que dijo estas palabras merece un *monumentum aere* [*perennius*]."

No puedo señalar quién fue el primero en decir estas palabras. Al igual que sucede con la mayoría de las frases lapidarias que merecen colocarse sobre los monumentos de la ciencia, el concepto que expresa fue buscado y vislumbrado, manoseado y correctamente aplicado mucho antes de su cristalización en palabras claras. De seguro que no fue Euler el primero en enunciarlo siquiera, pero como veremos, lo empleó una y otra vez y cada vez con mayor facilidad, generalidad y derechura, hasta tal punto que sus investigaciones hidrodinámicas de mediados del siglo lo dejaron al descubierto para todos, de una vez y para siempre. Esto lo heredó Cauchy, considerándolo como algo de lo más natural. Es más, al introducir la tracción $\boldsymbol{t}_n$ escribió que es "de la misma naturaleza que la presión hidrostática ejercida por un fluido en reposo contra la superficie exterior de un cuerpo. Sólo que la nueva presión no siempre permanece perpendicular a los planos sujetos a ella, ni igual en todas direcciones en un punto dado".

Los pasos vacilantes y hasta fluctuantes hacia el principio de corte constituyen una parte importante, pero no todo ni mucho menos, de la historia que hemos de detallar aquí. La hidrodinámica, aunque descansa sobre la versión plenamente general del principio de corte, todavía es una teoría anticuada y primitiva en cuanto confunde propiedades materiales con las leyes universales de la mecánica de medios continuos. Dicho en términos actuales, se enuncian conjuntamente ecuaciones constitutivas y los principios del momento lineal y del momento de la cantidad de movimiento, sin hacer distinciones. La confusión es sutil en cuanto se basa en una afirmación puramente geométrica, a saber, que la tracción es normal a la superficie sobre la que actúa, según se aserta en (9). Pero además, es profunda pues, en primer lugar, oscurece el carácter tensorial del esfuerzo, como queda expresado por el teorema fundamental de Cauchy (5), y en segundo lugar, hace equivalentes los principios del momento lineal y del momento de la cantidad de movimiento, como de hecho lo son para muchos sistemas degenerados[3].

Así, incluso después de la creación de la hidrodinámica, quedaba mucho por hacer. En primer lugar, había que ver y expresar el concepto de una componente de tracción paralela a la superficie sobre la cual actúa, actualmente llamada *esfuerzo cortante.* En segundo lugar, era necesario liberar el concepto de esfuerzo de *toda* restricción geométrica impuesta *a priori.* Dicho en la terminología moderna, había que distinguir el concepto de ecuación constitutiva como la definición de un material ideal, y apartarlo a un lado como perteneciente a una rama distinta de la disciplina, de manera que no restringiese los principios generales de la mecánica. Y en tercer lugar, faltaba la llegada del *principio del momento de la cantidad de movimiento* al lugar que le corresponde, haciendo compañía al principio del momento lineal y de igual categoría que éste.

El desarrollo de estas tres ideas había empezado antes de nacer Euler, y dado que cada una de ellas, como todas las grandes ideas de la física matemática, se descubrió por necesidad en la solución de problemas particulares, sus diversas historias están entremezcladas entre sí y con aquella del principio de corte. A continuación, las iremos siguiendo y desenrollando, si bien no en el orden cronológico exacto, a través de los oscuros tanteos de un caso a otro en las primeras investigaciones, las cuales conquistaban, uno por uno, aquellos elementos intuitivos individuales

---

[3] Vg., para un sistema puntual sujeto a fuerzas centrales equilibradas dos a dos. Este hecho ha dado lugar a una confusión, asiduamente nutrida por los cursos y libros de texto de física, de que el principio del momento de la cantidad de movimiento tan sólo es una consecuencia del principio del momento lineal o una "integral del movimiento".

La verdad es todo lo contrario, como puede verse de un razonamiento debido a Noll. Como principio básico de la mecánica podemos asentar la exigencia de que la *potencia mecánica sea indiferente al sistema de referencia,* esto es, invariante bajo transformaciones rígidas dependientes del tiempo del espacio-tiempo euclídeo (o alguno más general, "neo-clásico"). Cualquier transformación tal puede descomponerse en una traslación y una rotación. Considerando traslaciones, se obtiene el principio del momento lineal; considerando rotaciones, se obtiene el principio del momento de la cantidad de movimiento. Así, la independencia de los dos principios refleja una propiedad fundamental de espacio-tiempos en los cuales (1) existe un concepto absoluto de la simultaneidad y (2) la sección del universo en un instante dado es un espacio euclídeo.

Cuando se aplican estas ideas a sistemas puntuales, resulta que bajo hipótesis razonables de lisura, el principio del momento de la cantidad de movimiento es *equivalente* a la exigencia de que las fuerzas mutuas sean centrales y equilibradas dos a dos. El razonamiento de Cauchy mencionado en § 1 puede, asimismo, interpretarse como la demostración de que para cualquier material tridimensional cuya ecuación constitutiva obliga a ser simétrico el tensor de esfuerzos, el principio del momento lineal implica como corolario el principio del momento de la cantidad de movimiento, con tal que se defina el momento de la cantidad de movimiento de la manera usual y que el par venga dado por (2).

a los que Cauchy sólo había de extirparles las superfluas propiedades particulares y fusionarlos en un único armazón conceptual.

4. EL PRINCIPIO DE SOLIDIFICACION DE STEVIN (1586)

Es cosa de experiencia común el que los líquidos ejerzan fuerzas sobre las paredes de recipientes que los encierren, pero fue sólo mediante siglos de reflexiones sobre este y otros hechos de la mecánica, expresadas en términos de las elementales teorías matemáticas de fuerza y equilibrio, que llegó a desarrollarse algún concepto definido de presión *interna.*

La referencia más antigua a la fuerza ejercida por fluido sobre fluido ocurre en la teoría de Arquímedes sobre cuerpos flotando en un océano esférico que cubre una Tierra esférica (c. 250 a. J.C.). Su Postulado es[4]: "Concedamos que el fluido posee una naturaleza tal que de las partes del mismo que estén a la misma altura y sean contiguas, aquella que es menos comprimido es empujado a un lado por aquella que es más comprimido, y que cada una de sus partes sea comprimido por el fluido superior y en la misma vertical, con tal que el fluido no esté encerrado en nada ni comprimido por nada más". El significado de esto se descubre en las proposiciones que siguen. Primeramente, la condición al final no tiene otro fin que el de no comprometerle a Arquímedes con respecto a fluidos sujetos a circunstancias distintas, tales como el estar encerrado en un recipiente sujeto a una presión exterior. El "empuje a un lado" se refiere a lo que sucede antes de establecerse el equilibrio. En el equilibrio, afirma Arquímedes, las superficies que soportan un peso constante por unidad de área[5] son esferas alrededor del centro de la tierra. En la aplicación al equilibrio

---

[4] Este postulado ha dado bastantes dificultades de interpretación. La traducción inglesa de Heath, la única disponible hasta hace poco, se basa en un texto defectuoso que omite la palabra esencial "no"(μή) en la exclusión final. La traducción de Dijksterhuis es en esencial correcta pero oscura debido a su complicada sintaxis y a que no destaca suficientemente el concepto de vertical o línea de plomada (κάθετος).

[5] Claro que en ninguna parte dice Arquímedes precisamente esto, pero no puedo encontrar ningún otro significado específico para la expresión "comprimido por el fluido superior y en la misma vertical". Además, para que sea cierto el postulado, hemos de considerar que la parte comprimida se extiende hasta el centro de la Tierra, o a través del mismo, de modo que la línea de plomada (κάθετος) barre *dos* partes cónicas superiores a la parte dada. Véase la fig. 62, en la cual la parte fuertemente sombreada es aquella que está comprimida, mientras que las partes poco sombreadas son aquellas que están "por encima y en la misma vertical" que la primera. De otra manera, no proporciona el postulado todas las fuerzas necesarias para mantener el equilibrio.

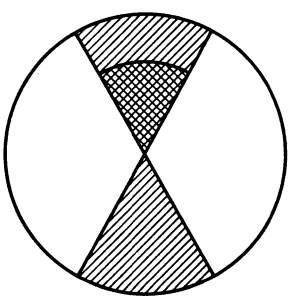


Fig. 62. Croquis para ilustrar las partes de un océano fluido verticalmente encima de una parte dada

de cuerpos flotando, supone que todavía subsiste este estado de cosas, sin que se perturbe por las partes inmersas de los sólidos rígidos. Parece que no se da cuenta que en una teoría rigurosa haría falta un nuevo axioma aquí, dado que el fluido es ciertamente comprimido por "algo más" que sí mismo.

Aunque Arquímedes deja bien claro que posee cierta idea acerca de la presión de fluido sobre fluido, no explicita ningún concepto de tal, ni mucho menos generalizarlo; es más, lo abandona en cuanto ha cumplido con su función de darle una herramienta para el análisis de un cuerpo flotando.

En la actualidad, a menudo se enuncia el *principio de solidificación* de Stevin como sigue: En cualquier fluido en reposo, si a cualquier porción se le reemplaza por un sólido rígido, no variarán las fuerzas ejercidas por la parte restante. Sin embargo, no puede encontrarse ningún enunciado del mismo tan amplio o explícito con anterioridad a la obra de Clairaut (1743). Acaso donde más se aproxima el propio Stevin (1586) es en su Teorema IV: "Un cuerpo sólido de peso específico igual al del agua mantiene cualquier posición que se le dé en el agua." Está restringida su teoría a fluidos incompresibles y pesados sobre la superficie de una Tierra plana. Deriva lo que viene a ser una fórmula correcta para el peso sostenido por un fondo horizontal plano y demuestra que es independiente de la forma del recipiente, caso de haberle, que confina al fluido por encima de este fondo, o incluso por debajo del mismo (fig. 64). Podemos expresar su resultado de la siguiente manera:

$$\text{Peso total} \propto \sigma h A \tag{12}$$

donde σ es el peso específico, h la profundidad, y A el área del fondo. De nuevo observamos que tiene que haber algún concepto de presión interna en el trasfondo de su inferencia de que añadiendo o quitando fronteras sólidas no altera la fuerza sobre el fondo, pero Stevin no se arriesga a aplicar este resultado a paredes que no sean planas y horizontales.

Es más, cuando se pone Stevin a calcular el "peso" del agua sobre un plano inclinado, recurre a una demostración por agotamiento al estilo de Arquímedes. Lo que nos interesa aquí no es el cálculo del límite sino el axioma mecánico que permite que sea aplicado a la hidrostática. Stevin divide el plano inclinado en tiras mediante líneas horizontales. A continuación, afirma que si se giran las tiras alrededor de sus bordes superiores hasta que estén horizontales, sostendrán menos peso puesto que hay menos fluido encima de ellas; análogamente, si se giran hasta quedar niveladas con sus bordes inferiores, sostendrán más peso dado que hay más fluido encima. Así pues, el peso verdadero está acotado por arriba y por debajo por pesos sobre planos horizontales, los cuales pueden calcularse con (12). El paso al límite cuando la anchura de las tiras se disminuye indefinidamente produce el mismo resultado para tanto la suma inferior como la superior, y por tanto, el peso verdadero (fig. 65).

Aunque el lector moderno, para el cual es segunda naturaleza el cálculo integral, ve que la hipótesis de Stevin no es ni más ni menos que la afirmación de que la tracción sobre una superficie de contorno con vector normal unitario exterior $\boldsymbol{n}$ es de la forma:

$$\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{n}} = -k\sigma h\boldsymbol{n}, \tag{13}$$

parece claro que Stevin no pudo haber poseído esta idea tan clara y explícita,

Fig. 63. Simon Stevin (1548-1620), retrato por un artista desconocido, hecho como pronto en 1620, reproducido por cortesía de la Biblioteca, Universidad de Leiden

la colomne ſoit celle qui eſt compriſe entre le fond pour ſa baſe E F, & G E hauteur, aſſavoir la colomne G E F H.

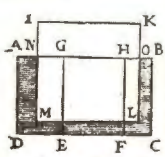
Le requis. Il faut demonſtrer que ſur le fond E F repoſe un poids egal à la peſanteur de l'eau de la colomne G E F H.

Demonstration.

Si ſur le fond E F repoſe un poids plus grand que G E F H, cela viendra à cauſe de l'eau prochaine: Soit, s'il eſt poſſible, de l'eau A D E G, & H F C B; & de meſme pourra-on dire que ſur le fond D E repoſe plus que l'eau A D E G, & ſur F C plus que l'eau H F C B; tellement que ſur D C repoſera plus que l'eau A D C B; ce qui eſt abſurde, eſtât iceluy un parallelipipede rectangle. Semblablement on demonſtrera que ſur E F ne repoſe pas moins que G E F H, & par conſequent ſur E F repoſera preciſement un poids egal à la colomne d'eau G E F H.

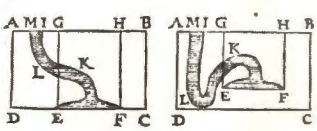
Corollaire I.

En l'eau A B C D de la 10 propoſition, mettons I L un corps ſolide minugrave à l'eau, c'eſt à dire flottant ſur l'eau, N L dedans, & N K dehors, comme cy-joignant; alors le ſolide I L, ſera equiponderant à l'eau N O L M, par la 5 propoſition, d'où s'enſuit que le corps I L, avec le reſte de l'eau d'alentour, eſt equiponderant à un corps d'eau, egal à A B C D; parquoy nous dirons encor ſelon la propoſition, que ſur le fond E F, repoſe un poids egal à la peſanteur de l'eau d'une telle colomne que G E F H, de laquelle E F eſt la baſe, & G E perpendicle, entre le fond & la fleur de l'eau pour la hauteur d'icelle: D'où l'on peut conclurre que quand quelque matiere flotte ſur l'eau, qu'elle n'apporte aucun changement au poids que le fond ſouſtient lors que l'eau demeure en la meſme hauteur.



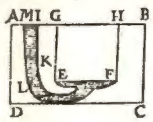
Corollaire II.

Soit encore en l'eau A B C D, un ou pluſieurs corps ſolides parigraves à l'eau; tellement qu'il n'y aye place que pour l'eau I K F E L M, alors ce corps ne ſurcharge, ny n'allege le fond E F pas plus que devant: Et partant ſelon la propoſition, ſur le fond E F, repoſe un poids egal à la peſanteur de l'eau, laquelle eſt egale à la colomne, ayant ledit fond pour baſe, & la hauteur egale à la perpendicle ſur l'horizon, qui eſt entre le fond & fleur d'eau.



Corollaire III.

Soit de tel chef A B C D entierement eau. E F un fond en icelle parallele à l'horizon; alors l'eau pouſſera autant par deſſous, en elevant que par deſſus en abaiſſant; Autrement le plus fort emporteroit le plus foible: ce qui n'arrive pas ainſi, d'autant que tout tient la diſpoſition qu'on luy donne, par la 1 propoſition. Soyent maintenant dedans l'eau quelques corps ſolides parigraves à icelle, & tellement diſpoſez que l'eau I K E F L M pouſſe par deſſous E F, aſſavoir contre le corps ſolide, comme devant contre l'eau; mais l'un contrepouſſoit egalement l'autre: donc contre E F y a un effort qui le pouſſe enhaut, de meſme que la colomne d'eau G E F H pouſſe le meſme fond E F embas, ſelon la propoſition; car la hauteur G E eſt la perpendicle interceptée entre la fleur de l'eau & le fond E F.

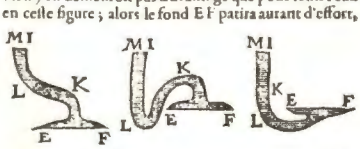


Corollaire IV.

Que ſi on mettoit les corps ſolides des deuxieſme & troiſieſme corollaires en leurs lieux, & l'eau vuidée, y ayant une place vuide I K F E L M; alors le fond E F ne portera aucune peſanteur; que ſi on remply le lieu vuidé, avec de l'eau, le fond patira autant d'effort, que lors que le vaiſſeau eſtoit entierement plein d'eau (ayant oſté les corps ſolides.)

Corollaire V.

Mais ſi on oſtoit la matiere inutile des corps ſolides, & s'il n'y en demeuroit pas d'avantage que pour tenir l'eau en celle figure; alors le fond E F patira autant d'effort, que s'il y avoit deſſus une colomne d'eau, compriſe ſur le meſme fond comme baſe, dont la hauteur ſoit la perpendicle entre ledit fond & la fleur d'eau.



Concluſion. Sur le fond de l'eau parallele à l'horizon, repoſe donc un poids, &c.

Liſez les eſpreuves deduites en l'Appendice de la practique de l'Hydroſtatique.

Notez.

Nous pourrions auſſi propoſer la 10 propoſition comme s'enſuit:

Sur quelconque fond d'eau, de ſuperfice parallele à la fleur d'icelle, repoſe un poids egal à la peſanteur de l'eau, compriſe dans un ſecteur ſpherique, trouqué par une ſuperfice ſpherique parallele, ou homocentrique à la ſuperfice ſpherique de la terre.

Nous euſſions fait auſſi les demonſtrations comme deſſus, mais nous l'avons delaiſſé pour les raiſons deſcrites en la ſeptieſme petition.

Theoreme IX. Proposition XI.

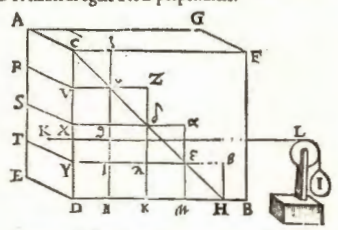
Sur un fond convenant, duquel le plus haut poinct eſt à fleur d'eau, repoſe un poids egal à la demi-colomne d'eau, de laquelle la baſe eſt pareille audit fond, & ſa hauteur egale à la perpendicle compriſe entre les niveaux qui paſſent par le plus haut & plus bas poinct dudit fond.

1 *Exemple.*

Le donné. Soit A B un vaiſſeau plein d'eau, & le fond A C D E ſoit premierement un parallelogramme, non parallele à l'horizon, comme devant, mais perpendiculaire à iceluy; duquel le plus haut coſté A C eſt à fleur d'eau,

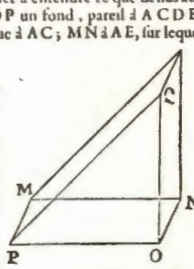
Fig. 64. El razonamiento dado por Stevin a favor del principio de solidificación, tomado del *De Beghinseln des Waterwichts,* 1586, según la republicación en francés de 1634. (El fondo EF debería haberse indicado por igual en todas las figuras)

d'eau, & AE ſoit la perpendicle compriſe entre les deux niveaux qui paſſent par les extremitez plus haute & plus baſſe dudit fond : & ſoit marquée H dans DB, parallele à l'horizon, tellement que DH ſoit egale à DC, & menée CH, tellement que par ACHDE ſoit denotée la demi-colomne, ayant ACDE pour baſe, & DH hauteur egale à AE perpendicle.



Le requis. Il faut demonſtrer que le poids qui repoſe contre le fond ACDE eſt egal à la demi-colomne ACHDE : C'eſt à dire (pour declarer le tout plus amplement) que ſi l'eſtoit un poids oblique, equiponderant ACHDE, & KL corde ſoit parallele à DH, & K centre de gravité de l'effort du pouſſement congregé à l'encontre du fond (lequel centre de gravité ſe trouvera par la 18 propoſition ſuivante) le poids I equiponderant à l'effort de l'eau tient le fond (poſant qu'il ſoit mobile) en ceſte diſpoſition.

Ou bien pour donner à entendre ce que deſſus autrement, Soit MNOP un fond, pareil à ACDE, aſſavoir MP homologue à AC ; MN à AE, ſur lequel fond MNOP repoſe un corps ſolide MNOPQ. pareil & equiponderant à ACHDE, & QO (egale à DH) ſoit perpendicle à l'horizon : je dis que le preſſement que MNOPQ fait ſur le fõd MNOP, (aſſavoir preſſant plus vers NO, que vers MP, pource qu'il eſt là plus eſpais & peſant qu'icy) eſt le meſme que l'eau contre le fond ACDE, (aſſavoir pouſſant plus vers ED, que vers AC.)



Preparation. Soit diviſée AE en 4 parties egales par R, S, T, & menées RV, SX, TY paralleles à AC ; & VZ, Xα, Yζ paralleles à DH, coupans CH en γ, δ, ε, & tellement que chacune des lignes γZ, $\delta\alpha$, $\varepsilon\beta$, ſoyent egales à Vγ. Soit auſſi menée par γ la ligne $\zeta\eta$, parallele à CD, coupant Xα en ϑ, & Yβ en ι ; de meſme la ligne Zϑ par δ, coupant Yβ en λ, & ainſi la ligne $\alpha\mu$ par ε, & finalement βH.

Demonstration.

Contre le fond ACVR repoſe plus que rien, car ſi ledit fond eſtoit tout à fleur d'eau, rien ne repoſeroit à l'encontre, mais il vient plus bas, donc il repoſe plus que rien à l'encontre d'iceluy : D'avantage je dis qu'à l'encontre d'iceluy repoſe moins que le corps d'eau ACζVR, car s'il eſtoit parallele à l'horizon par RV, alors ledit corps y repoſeroit, par la 10 propoſition ; mais il eſt plus haut, & par conſequent il y repoſe moins à l'encontre. Je dis ſemblablement que contre le fond RVXS repoſe plus que le corps d'eau AC$\zeta\gamma$VR, veu qu'il vient plus bas que Vγ, mais ledit corps d'eau eſt egal à RV$\gamma\vartheta$XS : D'avantage je dis que contre iceluy repoſe moins que le corps d'eau AC$\zeta\vartheta$XS, veu que le fond RX eſt plus haut que le fond SXϑ ; or ledit corps d'eau AC$\zeta\vartheta$XS eſt egal à RVZδXS ; parquoy contre le fond RX repoſe moins que RVZδXS. De meſme contre le fond SY, repoſe plus que AC$\zeta\vartheta$XS ; car il vient plus bas que le fond SXϑ, lequel corps eſt egal à SX$\delta\lambda$YT ; parquoy contre SY repoſe plus que SX$\delta\lambda$YT. D'avantage je dis qu'il y repoſe moins que AC$\zeta\iota$YT, car il eſt plus haut que le fond TYι ; or ledit corps AC$\zeta\iota$YT eſt egal à SX$\alpha\varepsilon$YT, donc contre le fond SY repoſe moins que SX$\alpha\varepsilon$YT. Pareillement contre le fond TD repoſe plus que AC$\zeta\iota$YT, car il vient plus bas que le fond TYι ; icelluy corps eſt egal à TY$\iota\mu$DE ; parquoy contre le fond TD repoſe plus que TY$\iota\mu$DE. D'avantage il y repoſe moins que le corps Aπ, car il vient plus haut que le fond EDπ ; mais ledit corps Aπ eſt egal à TYβHDE ; donc contre le fond TD, repoſe moins à l'encontre que TYβHDE. Or veu que contre

Le fond { AV, RX, SY, TD } repoſe plus que { rien ; RV$\gamma\vartheta$XS ; SX$\delta\lambda$YT ; TY$\iota\mu$DE } & moins que { AC$\zeta\gamma$VR. ; RδZ. ; S$\varepsilon\alpha$. ; THβ. }

Il s'enſuit que contre le fond entier ACDE repoſera plus que les corps ſuſdits enſemble, qui ſont le corps inſcrit RV$\gamma\vartheta\delta\lambda\varepsilon\mu$DE dans la demi-colomne ACHDE, & que contre ledit fond ACDE entier repoſeront moins que les corps circonſcrits enſemble, qui ſont le corps AC$\zeta\gamma$Z$\delta\alpha\varepsilon\beta$HDE, lequel eſt circonſcrit à la demi-colomne ACHDE.

Que ſi on diviſoit le fond ACDE en plus de 4 parties egales, ſoit en 8 ; il appert que les corps inſcrits & circonſcrits ne differeroyent que de la moitié de la difference precedente ; & eſt manifeſte qu'on pourroit partir le fond en tant de parties egales que la difference des corps inſcrits & circonſcrits à la demi-colomne, differeroyent moins qu'aucun corps donné, ſi petit puiſſe-il eſtre, d'où j'argumente ainſi.

A. *Toute peſanteur qui differe moins du poids repoſant contre le fond ACDE, qu'on ne ſçaurait donner, eſt egale au poids repoſant contre le fond ACDE.*

I. *Le poids de la demi colomne ACHDE, eſt une peſanteur differant moins du poids, qui repoſe contre le fond ACDE, qu'on ſçaurait donner.*

I. *Le poids donc de la demi-colomne ACHDE eſt egal au poids qui repoſe contre le fond ACDE.*

2. *Exemple.*

Le donné. Soit encore AB un vaiſſeau plein d'eau, & le fond ACDE d'iceluy ſoit un parallelogramme oblique à l'horizon, AC la plus haute extremité à fleur d'eau ACFG ; lequel ſoit diviſé comme au premier exemple, & ſoit Aν perpendiculaire à l'horizon, juſques au niveau par ED.

Le requis. Il faut demonſtrer que le poids d'eau qui repoſe contre le fond ACDE, eſt egal à la moitié de la colomne qui a pour baſe le fond ACDE, & hauteur Aν.

Preparation. Soit diviſée Aν en 4 parties egales par les poincts o, π, φ.

Demonstration.

Contre le fond AV repoſe un poids plus que rien, d'autant qu'il eſt plus bas que le fond Aζ, contre lequel rien ne repoſe : D'avantage il repoſe contre ledit fond

Fig. 65. El razonamiento de Stevin para calcular el peso del agua sobre una superficie inclinada, tomado del *De Beghinseln des Waterwichts,* 1586, según la reedición en francés de 1634

pues de ser así, habría resultado innecesario su proceso de paso al límite para la serie de teoremas[6] que demostró mediante su ayuda.

La obra de Pascal (1663) parece enteramente derivativa en lo que respecta a los fluidos incompresibles; a través de su libro llegó a saberse que el aire en equilibrio sigue leyes muy parecidas a las del agua.

5. La tensión de ruptura de Galileo (1638)

En la obra *Dos Ciencias Nuevas* (1638) de Galileo, Salviati se propone refutar el error común de que una cuerda larga no puede aguantar un peso tan grande como una corta (fig. 67). Dada una cuerda particular, considera fijado en *C* un peso justo lo suficiente como para romperla, y pregunta a Simplicio dónde tendrá lugar la rotura. Simplicio escoge un punto *D*, "porque en este punto la cuerda no es lo bastante fuerte para soportar, vg., 100 libras". A continuación, Salviati se imagina la cuerda fijada en *F*, justo por encima de *D*, y propone atar el peso en *E*, justo debajo de *D*. Aserta que la cuerda sigue estando sujeta a la misma tirantez en *D*, y por tanto, según admisión de Simplicio, el segmento corto *FE* volverá a romperse en *D*. Este *reductio ad absurdum* es una muestra típica del método de Galileo de esconder sus hipótesis bajo una capa de retórica. De hecho, ha supuesto que el efecto total de la cuerda y peso *DC* sobre la porción de cuerda encima de *D* consiste en ejercer en *D* una cierta fuerza en la dirección *DE*. Esto es, la acción del sistema debajo de *D* sobre aquel por encima de *D* es equipolente a una fuerza en *D*.

Evidentemente, el razonamiento en sí es ridículo ya que demuestra que una cuerda o bien no se rompe nunca o bien se rompe en todas partes a la vez. El concepto de carga crítica sencillamente no explica la ruptura de una cuerda uniforme, y en la experiencia común, como todo el mundo sabe, sucede que un trozo largo de cuerda procedente de un rollo dado generalmente, aunque no siempre, se rompe bajo una carga menor que la correspondiente a un trozo corto tomado al azar del mismo rollo. Galileo ha introducido un buen concepto aquí, pero lo ha hecho en caso que no le atañe.

Al considerar Galileo la ruptura de vigas cilíndricas en tensión, afirma que la fuerza requerida varía según el área de la base, "puesto que tantos más son las fibras, los filamentos o las partes tenaces que unen entre sí las partes de los sólidos". Esto es, supone que ocurre la ruptura cuando se alcanza una cierta fuerza por unidad de área. Véase fig. 68.

6. El concepto de tensión en un cable flexible según Pardies y Jaime Bernoulli (1673, 1691-1704)

En su estudio de la curva catenaria y del puente de suspensión, supuso Pardies que no varía la forma tomada por un cable flexible si solidificamos cualquier parte,

---

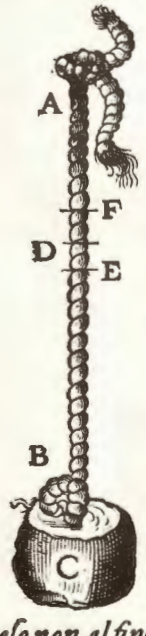
[6] Vg., el espléndido Teorema X: "Dado un fondo regular cuyo punto más alto está por debajo de la superficie superior del agua: el peso descansando sobre el mismo es igual al prisma de agua cuya base es igual a aquel fondo y cuya altura es la vertical desde el plano pasando por la superficie superior del agua hasta el punto más alto del fondo, y añadida a la cual, la mitad de la vertical desde el punto más alto del fondo hasta el plano paralelo al horizonte que pasa por el punto más bajo del fondo."

Fig. 66. Galileo Galilei (1564-1642), según un grabado de Ottavio Leoni, anterior a 1631

allungando, e non ſolo nell' vſo traſuerſale, mà ancora per lo lungo, in quel modo appunto che veggiamo vna corda lunghiſſima eſſer molto meno atta à reggere vn gran peſo, che ſe fuſſe corta: onde io credo che vna verga di legno, ò di ferro più peſo aſſai potrà reggere ſe ſarà corta, che ſe ſarà molto lunga; intendendo ſempre vſata per lo lungo, e non in trauerſo: & anco meſſo in conto il ſuo proprio peſo, che nella più lunga è maggiore.

Salu. *Dubito S. Simp., che in queſto punto voi con molti altri v'inganniate, ſe però hò ben compreſo il voſtro concetto, ſi che voi vogliate dire, che vna corda lunga, v. gr., quaranta braccia non poſſa ſoſtenere tanto peſo, quanto ſe fuſſe vn braccio, ò due della medeſima corda.*

Simp. *Coteſto hò voluto dire, e ſin quì mi par propoſizione aſſai probabile.*



Salu. *Mà io l'hò per falſa, non che per improbabile; e credo di poterui aſſai agevolmente cauar d'errore. Però ponghiamo queſta corda* A B *fermata di ſopra dal capo* A, *e dall' altro ſia il Peſo* C, *dalla cui forza debba eſſa corda eſſere rotta. Aſſegnatemi voi S. Simp. il luogo particolare doue debba ſeguir la rottura.*

Simp. *Sia nel luogo* D.

Salu. *Vi domando qual ſia la cagione dello ſtrapparſi in* D.

Simp. *E' la cauſa di ciò, perche la corda in quella parte non era potente a reggere, v. gr., cento libbre di peſo, quanto è la parte* D B *con la pietra* C.

Salu. *Adunque tutta volta che tal corda nella parte* D *veniſſe violentata dalle medeſime cento libbre di peſo, ella lì ſi ſtrapperebbe.*

Simp. *Così credo.*

Salu. *Mà ditemi ora; chi attaccaſſe il medeſimo peſo non al fine della corda* B, *mà vicino al punto* D, *come ſarebbe in* E,

Fig. 67. El razonamiento de Galileo para demostrar que una cuerda larga no es más débil que una corta (1638)

ſin quì dichiarate, non ſarà difficile l'intender la ragione, onde auuenga, che vn Priſma, ò Cilindro ſolido di vetro, acciaio, legno, ò altra materia frangibile, che ſoſpeſo per lungo ſoſterrà graviſſimo peſo, che gli ſia attaccato, mà in trauerſo (come poco fà diceuamo) da minor peſo aſſai potrà tal' volta eſſere ſpezzato, ſecondo che la ſua lunghezza eccederà la ſua groſſezza. Imperò che figuriamoci il Priſma ſolido A B, C D *fitto in vn muro dalla parte* A B, *e nell' altra eſtremità s'intenda la forza del Peſo* E, *(intendendo ſempre il muro eſſer eretto all' Orizonte, & il Priſma, ò Cilindro fitto nel muro ad angoli retti) è manifeſto che douendoſi ſpezzare ſi romperà nel luogo* B, *doue il taglio del muro ſerue per ſoſtegno, e la* B C *per la parte della Leua, doue ſi pone la forza, e la groſſezza del ſolido* B A *è l'altra parte della Leua, nella quale è poſta la reſiſtenza, che conſiſte nello ſtaccamento, che s' hà da fare della parte del ſolido* B D, *che è fuor del muro, da quella che è dentro; e per le coſe dichiarate il momento della forza poſta in* C *al momento della reſiſtenza che ſtà nella*

Prop. I.

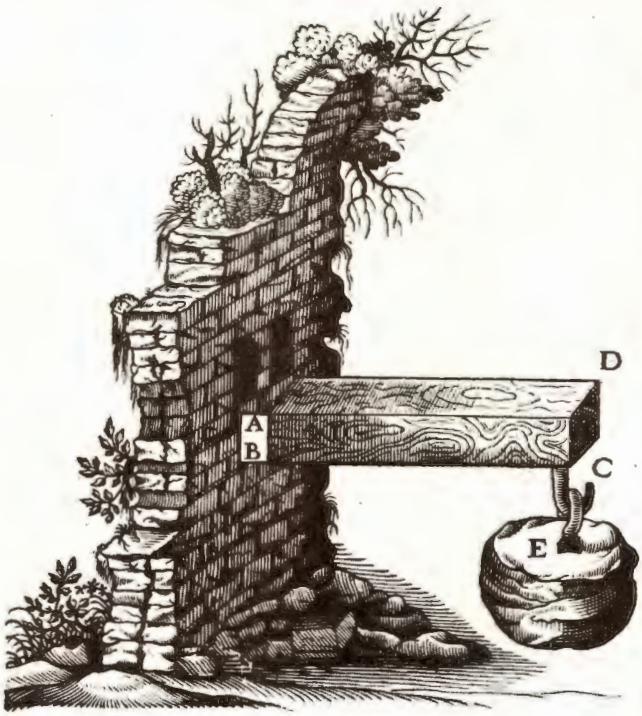


Fig. 68. Parte de la explicación de Galileo acerca de la resistencia a la rotura de una viga voladiza (1638)

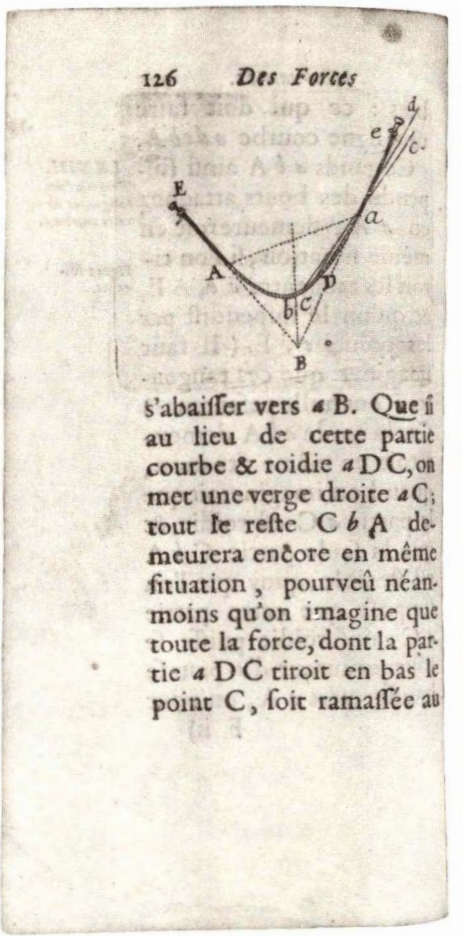


Fig. 69. El principio de Pardies (1673)

o más aún, si reemplazamos las partes superiores a dos puntos A y a por *fuerzas apropiadas que actúan según las tangentes en A y a* (fig. 69). Este principio se empleó en todos los análisis posteriores de la catenaria, en particular, los de Juan Bernoulli y Leibniz en el año 1690.

En una larga serie de investigaciones acerca de cables flexibles de grosor arbitrario y sujetos a distribuciones arbitrarias de cargas (1691-1704), Jaime Bernoulli adoptó, sin modificar, el principio de Pardies. Introdujo explícitamente la tensión (firmitas); denotando ésta por T, podemos escribir como sigue una de las formas en las que expresó las ecuaciones generales de equilibrio para un cable plano flexible:

$$T\frac{dx}{ds} = T_0 - \int_0^s B_x\,ds,$$

$$T\frac{dy}{ds} = -\int_0^s B_y\,ds, \tag{14}$$

Fig. 70. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), según un grabado hecho en 1775 por Johann Friedrich Bause, basándose en un cuadro de Andreas Scheits

bentur, & quidem fibris 1 H 2 H minus reſiſtet trahenti, quam fibra 1 B 2 B, idque in duplicata ratione diſtantiæ ab A, ſeu ex duplici capite a diſtantia ſumto. Nam *primo* pondus in C, quo opus eſſet ad tendendam fibram 1 H 2 H tantundem, quantum fibram 1 B 2 B, foret minus pondere requiſito ad tendendam fibram 1 B 2 B, in ratione A H ad A B: verbi gratia ſi A H ſit tertia pars ipſius A B, tunc & pondus in C, quod ſolam fibram 1 H 2 H ita extendere poteſt, ut fiat æqualis ipſi 1 B 2 *B*, erit tertia pars ponderis tendentis ſolam fibram 1 *B* 2 B. Verum nunc *ſecundo* cum ambæ ſimul tenduntur a pondere appenſo in C, utiq; fibra 1 H 2 H non eſt tantum tenſa quantum fibra 1 B 2 *B*, ſed multo minus, idque rurſus in ratione AH ad AB. nam ſi AH ſit tertia pars ipſius AB, erit 1 H 2 H tertia pars ipſius 1 B 2 B. Itaque (ex hypotheſi alibi confirmata, quod extenſiones ſint viribus tendentibus proportionales) ad eam ita tendendam tertia tantum ponderis parte opus erit, qua ad eam, tantundem quantum 1 B 2 B, tendendam opus fuiſſet; id eſt tertia parte tertiæ partis ponderis ipſam 1 B 2 B tendentis ſeu parte ejus nona. Itaque generaliter in hac ſimultanea tenſione omnium fibrarum ad quævis puncta exiſtentium, reſiſtentiæ in quolibet puncto erunt in duplicata ratione diſtantiarum a fulcro imo, ſeu centro vel axe librationis, ſumtarum; id eſt reſiſtentia in H erit ad reſiſtentiam in B, ut quadratum ipſius AH ad quadratum ipſius AB. Itaque ſi jam pondus F in *fig. 3.* ſit corpus parabolicum NRSQN, libere ſuſpenſum ex C, in quo altitudo NR ſit æqualis baſi RS (uti AB æqualis eſt ipſi AC) & ſint ordinatim applicatæ quadratis altitudinum proportionales, ſeu PQ ad RS, ut quadratum N P ad quadratum N R: tunc poſito baſin RS repræſentare reſiſtentiam in B, ordinata PQ repræſentabit reſiſtentiam in H; ſi ſcilicet altitudines NP, NR, ſint altitudinibus reſpondentibus AH, AB, proportionales; totum vero trilineum parabolicum concavum N R S Q N repræſentabit reſiſtentiam totius lineæ AB; ſi ſcilicet trabs ABC transverſim ſeu per modum vectis a pondere appenſo F deprimatur. At quadratum RNTS huic trilineo parabolico circumſcriptum, repræſentaret reſiſtentiam ejusdem lineæ A B directam, ſi ſcilicet trabs directe ex pariete eſſet evellenda, ut in *fig. 2.* Nam quia AB & AC æquales, reſiſtentia puncti B transverſa eadem erit quæ directa, nempe repræſentata per RS in *fig. 3:* jam ſi directe evellatur trabs (ut in fig. 2.) reſiſtentia omnium punctorum eadem eſt, ergo reſiſtentia directa

Fig. 71. La consideración de Leibniz de las tensiones en una viga voladiza cargada pero no deformada, tomada del *Acta Eruditorum* de julio, 1684

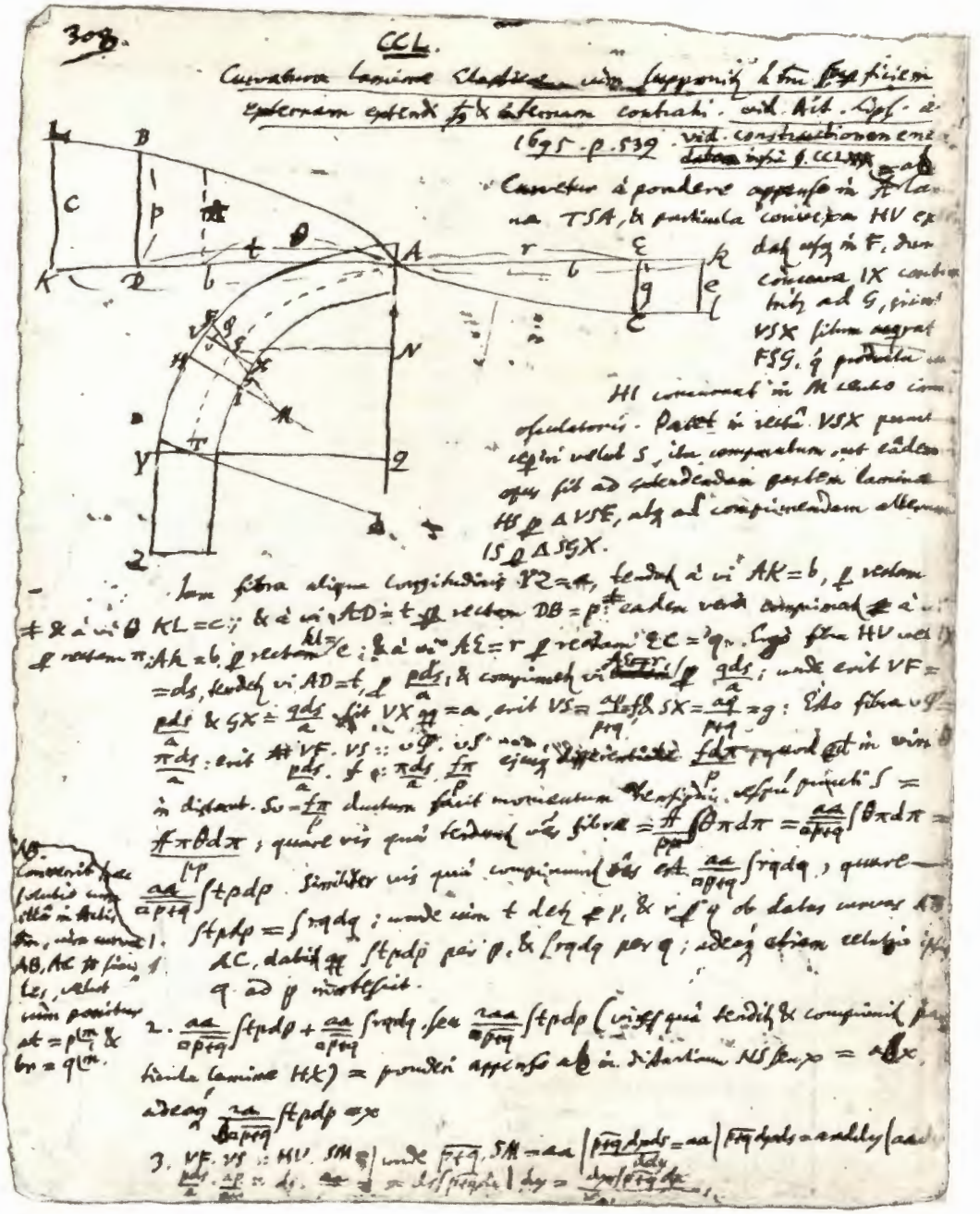


Fig. 72. Página 308 del cuaderno de apuntes de Jaime Bernoulli, mostrando su segundo intento de determinar la fibra neutra (alrededor de 1687, inédita, reproducida aquí por cortesía del Handschriften-Abteilung der Universitätsbibliothek, Basilea)

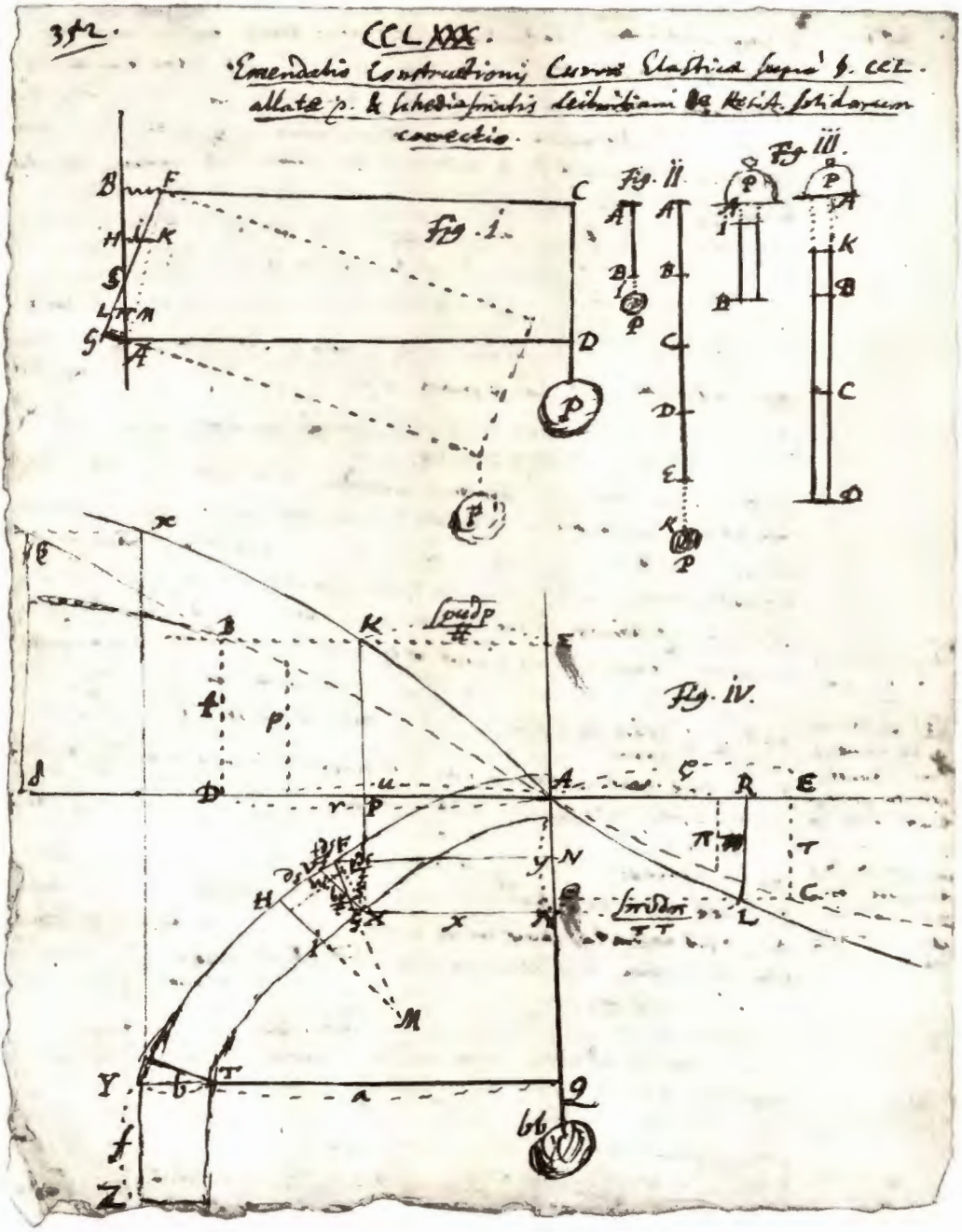


Fig. 73. Página 352 del cuaderno de apuntes de Jaime Bernoulli, mostrando sus figuras para su última tentativa de hallar la fibra neutra (alrededor de 1704, anteriormente inédita, reproducida aquí por cortesía del Handschriften-Abteilung der Universitätsbibliothek, Basilea)

donde B_x y B_y son las componentes de la fuerza de volumen por unidad de longitud. Estos resultados no se publicaron hasta el año 1744. Entre tanto, Hermann (1716), el cual había sido alumno del propio Bernoulli, los desarrolló, llegando a publicar una definición explícita de la "tenacitas vel firmitas": "La tensión o compresión de un hilo o cuerpo en cualquiera de sus puntos o en un elemento de la curva es aquella fuerza del hilo o cuerpo que resiste a aquel poder o fuerza que surge de todos los poderes aplicados y tiende a partirlo al tirar del hilo en direcciones opuestas. Esta tensión iguala exactamente o es equipolente a aquella fuerza de hendimiento resultante de todos los poderes aplicados al cuerpo." No es esta definición tan comprensiva como a primera vista podría parecer, pues Hermann no consideró nada que fuera más general que una curva plana perfectamente flexible.

7. Juicios de Leibniz, Jaime Bernoulli y Parent acerca de la variación de la tensión en las fibras de una viga cargada (1684, 1691, 1713)

En un análisis de la ruptura de una viga por una fuerza transversa, Leibniz (1684) *permitió que variasen las tensiones de las fibras.* Despreció las extensiones de las fibras en respuesta a las tensiones, y consideró a la propia flexión como suficientemente pequeña como para no alterar la resistencia. En efecto, pues, trató a la viga como rígida (fig. 71). Sus ideas las expresaron Varignon (1702) y Bülffinger (1729) con más claridad y en mayor detalle pero sin añadir mejoras sustanciales.

Jaime Bernoulli, en su primer trabajo sobre la flexión elástica (1691), reemplazó la acción de todas las fibras de una sección recta por aquella de un solo resorte en el lado convexo. Más tarde (1694-1705), en una serie de profundas y difíciles investigaciones sobre la fibra neutra, la mayoría de las cuales permanecen todavía sin publicar (figs. 72 y 73), quiso tomar en cuenta la variación de tensión simultáneamente con la flexión, pero adoptó una hipótesis errónea y fue por mal camino. Intentó en vano lograr aquí lo que había hecho con éxito total para los cables per-

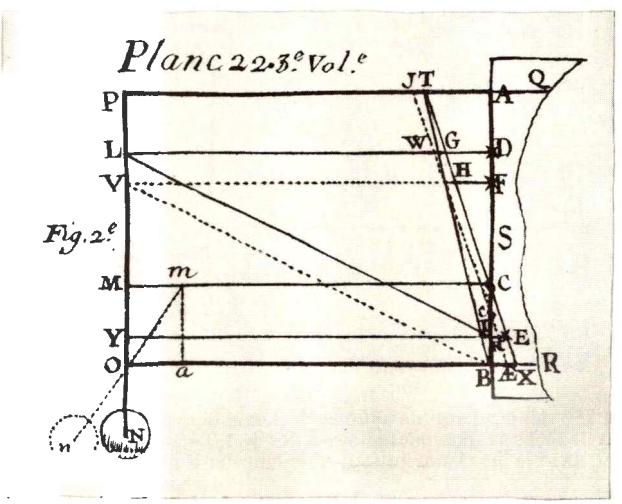


Fig. 74. Diagrama de Parent indicando fuerza cortante en una viga cargada

fectamente flexibles, a saber, expresar los principios universales de la mecánica, sin hacer uso de ninguna ecuación constitutiva definitoria de un tipo particular de material.

La obra de Jaime Bernoulli fue continuada por Parent (1713), quien fue el primero en considerar el equilibrio de fuerzas interiores además del equilibrio de momentos en el análisis de una viga cargada. Permitiendo distintos módulos para fuerzas normales que variaban linealmente, y representándolos en un diagrama, mostró que el área del triángulo de compresión ha de ser igual al del triángulo de tensión (fig. 74). En una sola frase también observó que son necesarias para el equilibrio fuerzas tangentes a la sección recta, esto es, *esfuerzos cortantes.* La excelente obra de Parent, que en verdad anuncia el principio de esfuerzos, se publicó de modo oscuro, no despertó ningún interés, y no tuvo, en consecuencia, influencia alguna.

8. Generalizaciones matemáticas de la hidrostática de Arquimedes y Stevin anteriores a las ecuaciones generales (1687-1749)

Por brillantes que fueran sus logros, la temprana hidrostática se desarrolló sin un concepto claro ni central de presión interna. El estudiante actual con facilidad ve cómo fue posible tal desarrollo, por antinatural que le parezca, dado que inmediatamente piensa en las ecuaciones en derivadas parciales de la hidrostática y su solución general; así puede comprender cómo una u otra propiedad de esta solución general pudiera haber sido a duras penas descubierta, intuida, o incluso demostrada por los primeros teóricos antes de que las propias ecuaciones diferenciales se hubiesen establecido y hecho la base de la disciplina entera. Sin intentar resumir las hazañas, aquí no hago más que recoger las insinuaciones y conjeturas que hasta cierto punto presagian el concepto de presión.

Newton (1687) fue el primero en *aislar mentalmente una parte del fluido interior* y en afirmar que es "igualmente comprimido en cada lado", y que "cualquier parte interna de un fluido está en el mismo estado que un cuerpo sumergido". No obstante, se refería únicamente a un fluido encerrado en el interior de un recipiente esférico inmóvil que a su vez es comprimido por igual en todas partes de su superficie. No publicó nada que se aproximara más al hecho de que en un fluido *cualquiera* en equilibrio, sujeto a *cualquier* campo de fuerzas, las presiones sobre todo elemento de superficie en un punto son normales al mismo e iguales en magnitud. Los tratamientos que dio Newton para problemas particulares sugieren, por el contrario, que no veía esta generalidad, dado que se apoyan en conjeturas ingeniosas que no hacen uso alguno del concepto de presión. Por ejemplo, para determinar la figura de una Tierra fluida en rotación, consideró dos canales perpendiculares, uno axial y el otro en el plano ecuatorial, penetrando ambos hasta el centro de la Tierra, y afirmó que las masas columnares de fluido en estos dos canales tenían el mismo peso (fig. 75). Asimismo, cuando tornó a considerar el movimiento de los fluidos, donde por cierto fue la primera persona en presentar una demostración matemática de algo, con el fin de obtener la regla de Torricelli para la velocidad con que surge el agua de un orificio al fondo de un recipiente, recurrió a un modelo en el cual una catarata de hielo, deslizándose por un embudo inmóvil de agua, se va fundiendo a medida que llega al fondo (fig. 44, pág. 142). Pero esta original y falsa conjetura

sobre el movimiento del agua, que parece extrapolar el principio de solidificación de Stevin, tampoco hace uso alguno del concepto de presión.

No se piense que Newton, al igual que ciertos físicos actuales, prefería un formalismo difuso y corazonadas inconexas a una bien fundamentada teoría matemática. Todavía siglos habían de transcurrir antes de que se inventara la "intuición física"[7]. Newton es el físico racional *par excellence.* Cuando torna a conjeturas y apaños es sólo por necesidad, por falta de conceptos y principios sobre los que basar una teoría racional. Es más, en el prefacio al *Principia,* después de jactarse de haber encontrado el sistema del mundo por demostraciones matemáticas a partir de un conjunto de axiomas mecánicos, escribe: "ojalá fuera posible derivar el resto de los fenómenos de la Naturaleza a partir de principios mecánicos mediante el mismo tipo de razonamiento". Así, el fracaso newtoniano en su intento de obtener soluciones claras y correctas a los problemas de mecánica de fluidos contra los que tan brillantemente se arremetió, demuestra con certeza que *no* dominaba los conceptos y principios de la hidrostática e hidrodinámica —en particular, los dos esenciales: el concepto de presión hidrostática y el principio universal del momento lineal.

En un intento de describir el equilibrio relativo de una masa de fluido en rotación, Huygens (1690) afirmó que la línea de plomada siempre era normal a la superficie del mar. Cuando un autor temprano establecía, pues, una proposición en hidrostática general, lo hacía demostrando que se seguía del newtoniano principio de las columnas, del principio de la plomada de Huygens, o ambos a la vez.

Taylor, que fue discípulo de Newton, creó la primera teoría matemática sobre los fluidos compresibles (1715). El postulado que de hecho empleó, aunque no lo enunció, es equivalente a:

$$dF \propto \sigma A\, dh, \tag{15}$$

donde F es la fuerza que se ejercería sobre un plano horizontal a la altura h. Por tanto, consideraba a la fórmula de Stevin (12) como correcta localmente, en forma diferencial, incluso para fluidos de peso específico variable σ.

La *Scientia Navalis* de Euler (terminada 1738, publicada 1749) trata únicamente fluidos incompresibles cerca de la superficie de una Tierra plana. Con su habitual claridad y franqueza, ya en la primera página enuncia Euler el principio que forma la base sobre la que descansan todos sus teoremas hidrostáticos. A saber, *las presiones en todas direcciones en un punto dado son iguales y son normales a los elementos de superficie sobre los cuales actúan.* El Lema 1 es equivalente a:

$$\boldsymbol{F} = -\sigma \int_S h\boldsymbol{n}\, dS, \tag{16}$$

donde $\boldsymbol{F}$ es la fuerza resultante sobre la superficie S y donde h es la profundidad correspondiente al punto donde el vector normal unitario exterior a S es $\boldsymbol{n}$. Así, como siempre, va directamente al meollo de la materia y presenta abiertamente la

---

[7] No se menciona en el artículo "Intuición" del *Oxford Dictionary* (1900) ni en el suplemento (1933). Lo que más se aproxima es la aceptación 6, "comprensión directa o inmediata", presentada mediante una cita de 1762 acerca de un pintor y apoyada por Froude hablando sobre César: "El atrevimiento, si fracasa, es locura, y si logra su propósito, es la intuición del genio." No puede ser éste el sentido moderno puesto que los físicos que fracasan, no importa con qué atrevimiento, no suelen considerarse como locos.

paulò altior eſſet ſub æquatore quàm ad polos, Maria ad polos ſubſiderent, & juxta æquatorem aſcendendo, ibi omnia inundarent.

Prop. XIX. Prob. II.

Invenire proportionem axis Planetæ ad diametros eidem perpendiculares.

Ad hujus Problematis ſolutionem requiritur computatio multiplex, quæ facilius exemplis quàm præceptis addiſcitur. Inito igitur calculo invenio, per Prop. IV. Lib. I. quod vis centrifuga partium Terræ ſub æquatore, ex motu diurno oriunda, ſit ad vim gravitatis ut 1 ad $290\frac{4}{7}$. Unde ſi $APBQ$ figuram Terræ deſignet revolutione Ellipſeos circa axem minorem PQ genitam; ſitque $ACQqca$ canalis aquæ plena, à polo Qq ad centrum Cc, & inde ad æquatorem Aa pergens: debebit pondus aquæ in canalis crure $ACca$ eſſe ad pondus aquæ in crure altero $QCcq$ ut 291 ad 290, eò quòd vis centrifuga ex circulari motu orta partem unam è ponderis partibus 291 ſuſtinebit & detrahet, & pondus 290 in altero crure ſuſtinebit partes reliquas. Porrò (ex Propoſitionis XCI. Corollario ſecundo, Lib. I.) computationem ineundo, invenio quod ſi Terra conſtaret ex uniformi materia, motuque omni privaretur, & eſſet ejus axis PQ ad diametrum AB ut 100 ad 101: gravitas in loco Q in Terram, foret ad gravitatem in eodem loco Q in ſphæram centro C radio PC vel QC deſcriptam, ut $126\frac{2}{17}$ ad $125\frac{2}{7}$. Et eodem argumento gravitas in loco A in Sphæroidem, convolutione Ellipſeos $APBQ$ circa axem AB deſcriptam, eſt ad gravitatem in eodem loco A in Sphæram centro C radio AC deſcriptam, ut $125\frac{3}{17}$ ad $126\frac{3}{17}$. Eſt autem gravitas in loco A in Terram, media proportionalis inter gravitates in dictam Sphæroidem & Sphæram, propterea quod Sphæ-

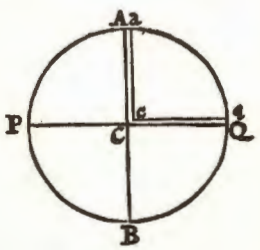


Fig. 75. El tratamiento de la figura de la Tierra dado por Newton en el *Principia*

THEORIE
DE LA
FIGURE
DE LA TERRE.

PREMIERE PARTIE.

Principes généraux pour trouver les hypotheſes dans leſquelles les Fluides peuvent être en équilibre, & pour déterminer la figure de la Terre & des autres Planetes, lorſque la Loi de la peſanteur eſt donnée.

CHAPITRE I.

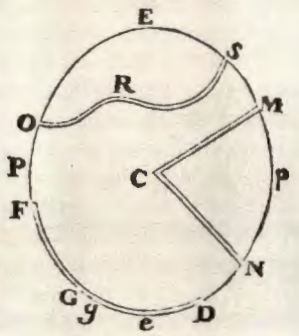
Expoſition d'un Principe général dont l'obſervation eſt néceſſaire pour l'équilibre des Fluides, avec les propoſitions préliminaires pour faire uſage de ce principe.

§. I.

UNE maſſe de Fluide ne ſçauroit être en équilibre, que les efforts de toutes les parties qui ſont compriſes dans un canal de figure quelconque qu'on

Fig. 76a, b. El principio de los canales equilibrados de Clairaut (1743)

imagine traverſer la maſſe entiere, ne ſe détruiſent mutuellement.



Puiſque la maſſe entiere *P E p e* eſt ſuppoſée en équilibre, une partie quelconque du Fluide pourroit devenir ſolide, ſans que le reſte changeât de ſituation. Suppoſons que toute la maſſe ſe durciſſe, excepté ce qu'il faut de Fluide pour former le Canal *O R S*, ce Canal ſera donc en équilibre; or cela ne peut arriver que les efforts de *O R* pour ſortir vers *S*, ne ſoient égaux à ceux de *S R* pour ſortir vers *O*.

hipótesis que hace. Esta es justamente lo bastante amplia para la clase de problemas que desea tratar. En una sola ecuación agota la hidrostática de Stevin pero sin sobrepasarla. En particular, el postulado empleado aquí por Euler no es lo suficientemente general para abarcar los problemas acometidos por Newton, Huygens y Taylor.

En 1740 demostró MacLaurin su espléndido teorema hidrostático: Todo esferoide achatado es una figura de equilibrio. Actualmente sabemos que este teorema, junto con su suplemento, que afirma que ningún esferoide alargado es una figura de equilibrio, es cierto según las ecuaciones generales, pero faltaban más de diez años para el descubrimiento de éstas cuando escribía MacLaurin.

La brillante obra de Clairaut, *Figure de la Terre* (1743), descansa sobre el axioma de que han de equilibrarse las fuerzas externas y mutuas que actúan a lo largo de un canal en el interior de una superficie de equilibrio que termina en la superficie de ésta (fig. 76). Este axioma incluye como casos particulares el principio newtoniano de las columnas y el de la plomada de Huygens. Aunque su consideración de divisiones imaginarias del fluido en partes sugiere el principio de corte, no hace Clairaut ninguna hipótesis acerca de la acción de fluido sobre fluido. Su interés se centra en las condiciones impuestas sobre la fuerza de volumen, y demuestra que para que sea posible el equilibrio, ha de ser exacta la diferencial de dicha fuerza. El libro de Clairaut, como el de Newton, es uno de los grandes triunfos de la Mecánica. En particular, presenta por primera vez un campo vectorial general, una meticulosa distinción entre fuerza y peso, el concepto de función potencial, y la teoría general de superficies de nivel. No obstante, al igual que su predecesor, no llega a dar con el concepto de presión interna; *a fortiori,* no contiene las ecuaciones diferenciales generales de la hidrostática.

9. Influencias de propiedades constitutivas sobre el concepto general de esfuerzo en la obra de Jaime Bernoulli y Euler acerca de la flexion de barras (1705, 1727, 1779)

La tracción $t_{\partial\gamma}$ o t_n en las ecuaciones (1)-(5) no es una fuerza sino una densidad superficial de fuerza, esto es, una fuerza por unidad de área. Para una teoría propiamente general del esfuerzo es esencial esta distinción, aunque no importaba para los primitivos casos particulares. Como hemos visto en § 5, Galileo fue el primero en enunciar una propiedad de un material en términos de fuerza por unidad de área en vez de fuerza. En la mayoría del resto de las investigaciones tempranas no se vio esta distinción. Por ejemplo, en los toscos experimentos en elasticidad de Hooke, la constante de proporcionalidad en la "ley de Hooke" es una fuerza y no un esfuerzo, y claro está, es diferente para dos barras de distinta forma cortadas del mismo trozo de hierro. Después de Galileo, el siguiente en ver la luz fue Jaime Bernoulli, quien en su gran publicación final de 1705 afirmó que la ley elástica de las fibras de una viga debía expresar la fracción de extensión como función de la fuerza dividida por el área. Acaso debido a que contenía errores en otras cuestiones, las ideas de este trabajo no las dominaron aquellos que le siguieron a Bernoulli, ni siquiera Parent. Dado que, como sucede en el estudio de Leibniz sobre vigas inextensibles e inflexibles, la forma de la sección recta tiene una influencia explícita sobre el módulo, no puede salir ninguna respuesta definida del análisis. El primer punto donde resulta *matemáticamente necesario* emplear una ecuación general para

el *material* en vez de ecuaciones diversas para cuerpos diferentes ocurre cuando derivamos la ley de flexión de Bernoulli a partir de una ley de extensión para las fibras con el fin de obtener el actualmente bien conocido resultado $\mathscr{B} = EI$, donde E es el "modulo de Young" del material e I es el momento de inercia de la sección recta con respecto al eje normal al plano de flexión y pasando por la fibra neutra. La magnitud I había ocurrido ya en el trabajo de 1687 de Leibniz sobre barras esencialmente inextensibles e inflexibles, mencionado arriba. Con objeto de integrar las tracciones sobre la sección recta, como lo hizo Leibniz, se ha de disponer de una regla explícita para la tensión por unidad de área, y no simplemente la tensión resultante en una barra. Jaime Bernoulli intentó toda su vida obtener una teoría de flexión basada en una ley de extensión para las fibras, pero a pesar de haber reunido suficiente número de conceptos y principios, nunca consiguió su propósito. Así quedó para Euler el lograr la demostración en el transcurso de su primer intento de desarrollar la teoría de la elasticidad, realizado a los veinte años cuando era estudiante en Basilea, aunque no se publicó hasta 1862. Este estudio emplea explícitamente una relación esfuerzo-deformación unidimensional del tipo propuesto veinte años antes por Jaime Bernoulli, pero con la diferencia de ser lineal, de modo que ha de introducirse el hoy llamado "módulo de Young". Euler no volvió a esta cuestión hasta 1779, ya al final de su vida. En sus últimas investigaciones acerca de las vibraciones de barras, publicadas en 1782, presentó y explicó la definición del "módulo de Young[8]" y las leyes de escalas para varillas basadas en su aplicación.

En todo este trabajo, claro está, no se saca al descubierto el carácter vectorial de la tracción, si bien resulta bastante obvio. Por otra parte, entretanto, otras investigaciones sobre fluidos, que describiremos a continuación, se habían visto obligadas a tomar en cuenta la distinción entre fuerza y densidad superficial de fuerza y además habían explicitado la dirección de dicha densidad de fuerza aunque, cierto es, de una forma indebidamente particular.

10. La hidraulica de Daniel Bernoulli, Juan Bernoulli y Euler (1730-1752)

En 1730, Daniel Bernoulli consiguió relacionar la velocidad de un flujo estacionario de un fluido incompresible en un tubo a la presión que ejerce sobre las paredes de éste. Actualmente conocemos su resultado en la forma:

$$p + \tfrac{1}{2}\varrho v^2 + \sigma h = \text{const.}, \tag{17}$$

pero el hecho es que él no lo expresó así. En efecto, suponiendo que h = constante, lo escribe de la manera siguiente (figs. 77,78):

$$v\frac{dv}{dx} = \frac{a - v^2}{2c}, \tag{18}$$

---

[8] Debería ser innecesario comentarlo, pero, desgraciadamente, conviene recalcar que el propio Young ni introdujo este módulo ni reconoció una ley de elasticidad como expresión de una propiedad de un material en vez de una muestra particular de dicho material. Los trozos de las conferencias de Young de 1807 que tratan de la elasticidad y vibraciones consisten de repeticiones de las partes más fáciles de las investigaciones llevadas a cabo por los Bernoulli y Euler, con las ecuaciones traducidas en palabras y con demostraciones, a menudo insuficientes, expresadas en términos de fluxiones y sin dar referencias.

Fig. 77. Las últimas dos páginas de la carta del 17 de julio de 1730, de Daniel Bernoulli a Goldbach, dando el enunciado más temprano del "Teorema de Bernoulli" (de los Archivos Estatales Centrales para Actas Antiguas, Moscú, por cortesía del Dr. G. K. Mikhailov). Algunas letras se han perdido en la encuadernación de la pág. 94 a la izquierda y pág. 94v. a la derecha. El frag-

346.

marque que dans ce cas le tuyau horitontal ne souffre aucune effort
ce qui donne de nouvelles regles pour la structure des tuyaux qui conduisent
l'eau, et ce que Mr. Bueffingre ne pouvoit s'imaginer jusques à ce que je
lui en fis l'experience en presence des autres Academiciens. Je faisois les
experiences moyennant un cylindre tres poli de fer que je me fis faire avec
differens couvercles, qui avoit des trous de differente grandeur tel qu'est [illegible]
au milieu du cylindre etoit soudé un petit bout de tuyau VRSQ propre à embrasser un
tuyau de verre CRSD: toutes les experiences ont parfaitement reussi.

Mais je vois qu'il m'arrive la meme chose qu'a ceux qui ont un [illegible]
et qui veulent le couler à tout le monde: Pardonnez moi, Monsieur, cette
digression ou plutot cette indiscretion. Quant au probleme de changer
$\frac{dt}{1+zz}$ en $\frac{n\,dv}{1+vv}$, je vous prie de ne les pas croire ces circonstances, qui ont
voulu vous persuader, qu'il m'auroit eté difficile du tems que parurent mes [illegible]
citations: comme tout le mystere ne depend que des logarithmes, dont je savois parfaitement
bien le calcul alors, je crois qu'il m'auroit aussi eté egalement facile mais je comprens
bien qu'elles sont ces circonstances; c'est que vous croyez, que j'aye employé les series recurrentes
et veritablement on peut s'en servir, mais on peut aussi s'en passer: marque de cela c'est que
pour transformer par ex. $\frac{dz}{1-zz}$ en $\frac{n\,dx}{1-xx}$, il faut poser $z = \frac{(1+x)^n-(1-x)^n}{(1+x)^n+(1-x)^n}$, qui n'a point
de ressemblance avec les termes generaux des suites recurrentes. Quant au probleme
de changer $\frac{dz}{1+zz}$ en $\frac{n\,v^p\,dv}{1+vv}$, on ne sauroit donner des substitutions generales, mais
on peut bien donner des substitutions generales pour chaque valeur particuliere de p.
ainsi si $p=1$, on changera $\frac{dz}{1+zz}$ en $\frac{n\,v\,dv}{1+vv}$ par la substitution de $z = \frac{1-(1+vv)^n\sqrt{-1}}{(1+vv)^n-\sqrt{-1}}$
pour votre cas particulier de $n=-\sqrt{-1}$ et $p=-1$, il faut poser $z = \frac{\sqrt{-1}}{1+2vv}$.
On parvient à ces substitutions sans aucune inconnue et en ne travaillant
que synthetiquement, et chaque substitution à trouver ne coute qu'une minute de
tems. J'aurai l'honneur de vous entretenir sur ces sortes de problemes,
quand j'aurai le plaisir de vous revoir. j'espere que ce sera dans peu.
Je ne manquerai pas d'aporter tout le soin à fin que votre dissertation
soit bien imprimée. Je suis avec toute sorte de consideration
et d'estime

Monsieur

Votre tres humble et
tres obeissant serviteur
Daniel Bernoulli.

R. à Moscou le 23. Juill. 1730.

mento comienza en la página anterior: "Pour moi je me suis entierement plongé dans les eaux, qui font mon unique occupation, et renonce depuis quelque tems à tout ce qui n'est pas hydrostatique ou hydraulique... Pour en fair le"

laterum proportionalem eſſe accelerationi ſeu incremento velocitatis, quod aqua ſit acceptura, ſi in inſtanti omne obſtaculum motus evaneſcat, ſic ut immediate in aërem ejiciatur.

Res igitur jam eo perducta eſt, ut ſi durante fluxu aquæ per e, tubus E D in temporis puncto abrumpatur in cd, quæratur quantam acceleratio-nem guttula $acbd$ inde ſit perceptura : tantam enim preſſionem ſentiet particula ac in lateribus tubi ſumta à præterfluente aqua : Hunc in finem conſiderandum eſt vas A B E cd C, atque pro eo invenienda acceleratio particulæ aqueæ effluxui proximæ, ſi hæc habuerit velocitatem $\frac{\sqrt{a}}{n}$: Iſtud negotium fecimus generaliſſime in *paragrapho tertio ſect. V.* Attamen quia in hoc caſu particulari brevis eſt calculus, motum in vaſe decurtato A B E cd C hic iterum calculo ſubducemus.

Sit velocitas aquæ in tubo Ed, quæ nunc ut variabilis conſideranda eſt, $= v$: amplitudo tubi ut antea $= n$, longitudo E$c = c$: indicetur longitudo ac particulæ aqueæ infinite parvæ & effluxui proxime per dx : Erit guttula æqualis in E tubum ingreſſura eodem temporis puncto quo altera $acdb$ ejicitur : dum autem guttula in E, cujus maſſa $= ndx$, tubum ingreditur acquirit velocitatem v, atque *vim vivam* $nvvdx$, quæ *vis viva* tota fuit de novo generata ; nullum enim, ob amplitudinem vaſis A E infinitam, motum guttula in E habuit tubum nondum ingreſſa : huic *vi vivæ* $nvvdx$ addendum eſt incrementum *vis vivæ*, quod aqua in Eb accipit, dum guttula ad effluit, nempe $2ncvdv$: aggregatum debetur *deſcenſui actuali* guttulæ ndx per altitudinem B E ſeu a: habetur igitur $nvvdx + 2ncvdv = nadx$ ſive $\frac{vdv}{dx} = \frac{a-vv}{2c}$.

In omni autem motu eſt incrementum velocitatis dv proportionale preſſioni ductæ in tempuſculum quod hic eſt $\frac{dx}{v}$: igitur in noſtro caſu eſt preſſio, quam guttula ad patitur, proportionalis quantitati $\frac{vdv}{dx}$, id eſt, quantitati $\frac{a-vv}{2c}$.

Eſt vero in eo temporis puncto, quo tubus abrumpitur, $v = \frac{\sqrt{a}}{n}$ vel $vv = \frac{a}{nn}$, hic igitur valor ſubſtituendus eſt in expreſſione $\frac{a-vv}{2c}$, quæ

Fig. 78. El "Teorema de Bernoulli" tal y como se publicó en la *Hydrodynamica,* 1738

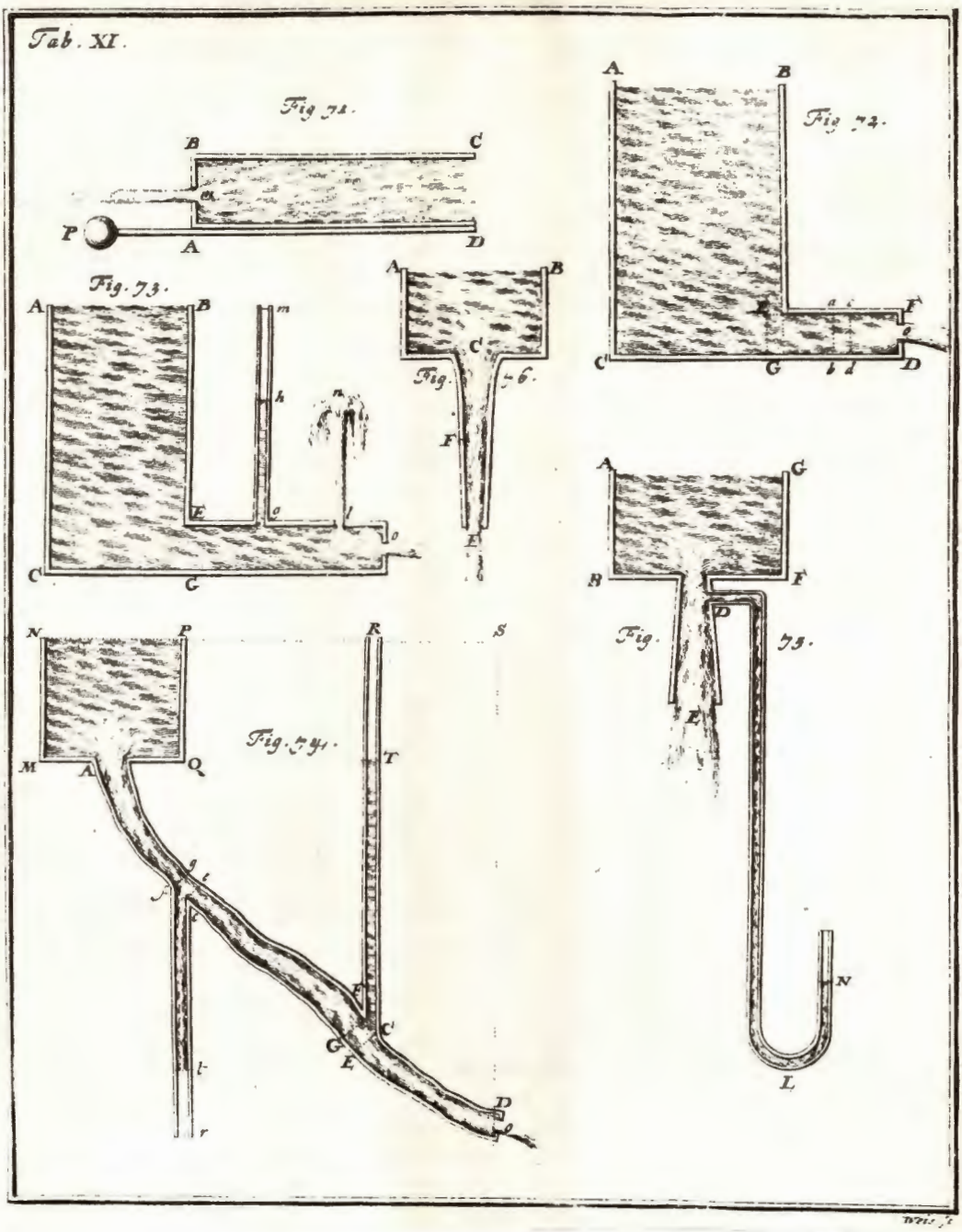


Fig. 79. Placa XI de la *Hydrodynamica* de Daniel Bernoulli

donde las unidades se han escogido de tal modo que la aceleración de la gravedad vale $\frac{1}{2}$, donde $\sqrt{a}$ es una velocidad de referencia, y donde dv es el incremento impulsivo de velocidad que experimentaría el agua que fluye con velocidad v al atravesar la distancia dx si el tubo, supuesto horizontal, repentinamente desapareciese en el punto x. Para obtener este resultado, apela a ideas relacionadas con la conservación de la energía. Así pues (18) no es una ecuación diferencial; más bien, $cv\frac{dv}{dx}$ es propiamente la fuerza de aceleración, o como lo diríamos hoy, $cv\frac{dv}{dx}$ es la presión interna por unidad de densidad. Bernoulli, sin embargo, no dice esto en absoluto, y es solamente mediante la introducción de ideas no empleadas por él que podamos casar el resultado suyo a lo que en la actualidad se denomina el "teorema de Bernoulli". Es más, mediante un razonamiento ulterior identifica él a $v\frac{dv}{dx}$ con la presión sobre la pared del tubo cuando éste ejerce suficiente fuerza como para impedir que el agua lo reviente. La línea de razonamiento tomado aquí deja bien claro que no tenía Daniel Bernoulli el concepto de presión interna. Por supuesto que sabía que el agua ejercía presiones sobre sí misma, e hizo algunos comentarios vagos acerca de tales presiones, pero no entran éstos en su razonamiento, su resultado, ni sus aplicaciones del mismo.

El éxito obtenido por la *Hydrodynamica,* publicada en 1738, atrajo sobre su autor la envidia de dos de los principales geómetras de la época: el joven D'Alembert, de quien oiremos más en seguida, y el anciano padre del propio Daniel Bernoulli, el formidable y pugnaz Juan Bernoulli.

En 1743 publicaba Juan Bernoulli su "Hydraulica, nunc primum detecta ac demostrata ex fundamentis pure mechanicis". Aunque se sabe que no empezó a escribir su manuscrito antes de 1738 y que no lo terminó antes de 1740, no obstante, intentó apropiarse el trabajo fundamental de su hijo colocando en el suyo propio la fecha de 1732, un año antes de que Daniel hubiese entregado su manuscrito en la Academia de Petersburgo.

Los problemas y resultados del tratado de Juan Bernoulli son generalizaciones de lo que se encuentra en el cap. 12 del libro de su hijo. El enfoque y el método empleados son, no obstante, completamente diferentes. Juan Bernoulli separa meticulosamente la cinemática y la dinámica de flujos. Para describir ésta, introduce la "fuerza interior", la cual actúa sobre las secciones rectas del fluido en el recipiente. Está claro el progreso de su matemática, a pesar de que ocultó la naturaleza de esta fuerza interior en ciertas afirmaciones intencionadamente confusas acerca del "remolino" provocado por un cambio en el área de la sección recta, y a pesar de que no explicó los fundamentos por miedo a que pensaran los "despreciables ingleses" que debía algo a la "catarata" de Newton, según escribió a Euler. Había sido el primer héroe del problema de la catenaria en 1690; conocía en principio las investigaciones posteriores de su hermano mayor, si bien es cierto que se le negaba el conocimiento de los detalles; desde luego, una cosa que sí sabía hacer era calcular la diferencia de fuerzas actuando sobre los extremos de un segmento infinitesimal de una curva[9]. Con su aguda habilidad para aprehender el artificio más apropiado, que no había perdido siquiera siendo septuagenario, aplicó inmediatamente al fluido en un tubo el método más sencillo de tratar la catenaria, haciendo ahora la hipótesis de

[9] En otra obra tardía, publicada al mismo tiempo, fue el primer autor en obtener un conjunto de ecuaciones diferenciales como enunciado completo del movimiento de un sistema deformable, a saber, el péndulo compuesto.

que hay una presión hidráulica que juega el papel de la tensión en el cable flexible. Así, el viejo Juan Bernoulli fue el primero en dar la "ecuación de Bernoulli" en lo que es, esencialmente, su forma moderna (fig. 80):

$$p = \frac{\alpha^2 b^2 - \beta^2 \omega^2}{2\alpha^2 b} v^2 + \frac{b\omega v\, dv}{dx} \int \frac{ds^2}{y\, dt} \cdot \tag{19}$$

No hace falta explicar todos los símbolos. En seguida vemos que allí está la presión, juntamente con los ajustes por la condición no estacionaria del flujo y por cambios en la sección y la altura.

Euler adoptó con entusiasmo la idea de Juan Bernoulli, haciendo de ella la base de su presentación clara y general de la hidráulica en una secuencia de obras sobre problemas de ingeniería de bombas, norias, convección térmica, etc. (1749 a 1752). Merece la pena destacar en particular su proyecto y diseño de una turbina, la cual no consiguió atraer la atención de los "hombres prácticos" de su tiempo ni después hasta que por fin fue construído en 1944 por Ackeret, encontrándose en ella un comportamiento casi tan bueno como el de las mejores máquinas modernas de capacidad y carga de presión semejantes. Hizo su primera aparición en esta obra la "fuerza de Coriolis"; pero además, a partir de este momento, la verdadera *presión hidráulica* p asumió su posición central en la mecánica de fluidos, aunque todavía únicamente para fluidos incompresibles en tubos, dando lugar a una primitiva teoría unidimensional.

11. Los primeros ensayos de una hidrodinamica debidos a Euler y D'Alembert (1745-1749)

No obstante el hecho de que aparecen unas pocas palabras acerca de un campo de velocidades en cierta parte del texto de Daniel Bernoulli, todas las investigaciones iniciales concretas estaban limitadas por la "hipótesis de secciones paralelas", según la cual todas las partículas de fluido en una sección recta de un tubo poseen la misma velocidad, de modo que hay una sola variable independiente de posición. El primero que dividió el flujo que pasa alrededor de un obstáculo en filetes de corriente fue Euler en su traducción (1745) de los *Nuevos Principios de Artillería* de Robins (fig. 81). Recurriendo al balance de cantidades de movimiento en el infinito, Euler dio una demostración correcta y bastante general de que un flujo estacionario de fluido que pasa alrededor de un obstáculo no ejerce ninguna fuerza sobre éste. Este hecho un tanto chocante se llama la "paradoja de D'Alembert" por la razón de que fue redescubierto o apropiado varios años más tarde por D'Alembert, el cual lo dedujo haciendo una engañosa e innecesaria apelación a la simetría. No causa sorpresa el que esta temprana obra de Euler no introduzca la presión interna, dado que precede a sus investigaciones hidráulicas descritas arriba.

Si bien es verdad que el *Traité des Fluides* (1744) de D'Alembert no añadió nada a la disciplina, no ocurre igual con su *Ensayo sobre la causa general de los vientos,* que ganó el premio de Berlín de 1746. Teniendo en cuenta que D'Alembert supuso que los vientos surgen de las atracciones del sol y la luna, no podemos protestar ante el disgusto y desprecio que suscitara en Daniel Bernoulli: "Cuando uno lo ha leído todo, sabe tanto acerca de los vientos como antes." Tortuoso, obscuro, inelegante, pretencioso, fatigante con sus rodeos, restricciones inútiles y enredantes,

VI.

Hæ duæ vires, *hydroſtatica* & *hydraulica*, componunt vim totalem, quæ nimirum generatur ab actione vis primitivæ p, quæ inventa eſt Art. III $= ghα$. Æquando itaque hanc, cum aggregato illarum duarum Art. IV & V inventarum, obtinebimus æquationem generaliſſimam, pro determinatione velocitatis quacum liquor quovis momento effluit, quæ æquatio hæc eſt $\frac{vv(\alpha\alpha bb - \zeta\zeta\omega\omega)}{2\alpha\alpha b} + \frac{b\omega v dv}{\alpha dx}\int\frac{ds^2}{ydt} = ghα$. Ubi notandum per $\int\frac{ds^2}{ydt}$ intelligi ſummam omnium $\frac{ds^2}{ydt}$ quæ continentur non tantum inter Cc & Ff, ſed omnino inter extremas ab una ad alteram omnes comprehendendo.

VII.

Quod ſi lubeat exprimere æquationem per z, ſeu altitudinem unde corpus naturali gravitate g præditum delabendo acquirat velocitatem quæſitam v; ſcribendum tantum eſt, per principia dynamica, $2gz$ pro vv & gdz pro vdv; id quod dabit hanc æquationem $\frac{gz(\alpha\alpha bb - \zeta\zeta\omega\omega)}{\alpha\alpha b} + \frac{gb\omega dz}{\alpha dx}\int\frac{ds^2}{ydt} = ghα$, vel reductione peracta hanc $(\alpha\alpha bb - \zeta\zeta\omega\omega)zdx + \alpha bb\omega dz \times \int\frac{ds^2}{ydt} = \alpha\alpha bbhαdx$, vel quia $\int\frac{ds^2}{ydt}$, ſumendum per totam axis longitudinem, ut conſtans, adeoque ut datum ſupponi poteſt, ſaltem per quadraturas, nominetur illud M; eritque æquatio ad hanc formam reducta $(\alpha\alpha bb - \zeta\zeta\omega\omega)zdx + \alpha Mbb\omega dz = \alpha\alpha bbhαdx$. Ex reſolutione hujus æquationis, invenietur z in quantitatibus datis per x, & conſtantes M, α, b, ω, α, ζ.

COROLLARIUM I.

Exiſtente effluxus velocitate uniformi, ad quam ſenſibiliter

Fig. 80. La generalización hecha por Juan Bernoulli del "teorema de Bernoulli", empleando la presión interna (manuscrito terminado en 1740, aunque pretendiese él que fuera una obra de 1732, impreso en 1743 en el Tomo 4 de sus *Opera*, que lleva fecha de 1742)

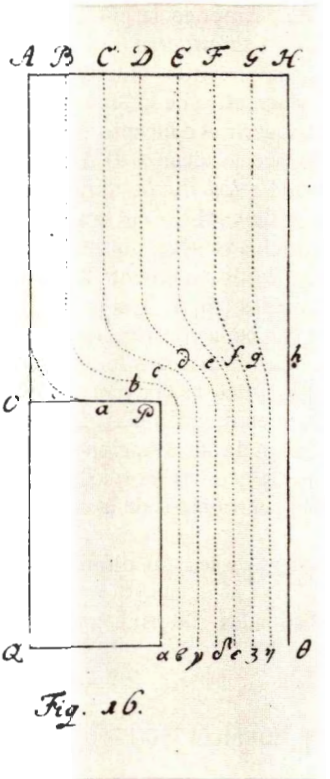


Fig. 81. El dibujo más antiguo de los filetes de corriente de un flujo estacionario (tomado de la *Artillerie* de Euler, 1745)

y ejemplos numéricos irrelevantes con hasta seis u ocho cifras a medida que se arrastra de un caso particular o incluso incompatible a otro infinitésimamente más general —no obstante, finalmente llega a obtener ciertas ecuaciones en derivadas parciales que, se afirma, gobiernan el flujo axialmente simétrico de un fluido compresible en movimiento pequeño sobre una esfera[10]. Después de varios intentos a lo largo de los pasados quince años, he de confesar que nunca he podido seguir las profusas notaciones, conceptos tortuosos e interminable álgebra de D'Alembert en suficiente medida como para decidir si sus resultados son correctos o no[11].

---

[10] Parece ser que esta obra nunca ha sido analizada en detalle por ningún estudioso de nuestra época. El resumen mío, dado en p. LVII de *Euleri Opera Omnia* (II) 12 (1945) es insuficiente y en parte injusto.

[11] Las ecuaciones que definen su teoría parecen ser aquellas numeradas desde (M) hasta (R) inclusive, en § 77.

Merece la pena señalar que D'Alembert fue el primero en derivar una ecuación en derivadas parciales como formulación de una teoría física entera, a saber, la cuerda colgante con peso (1743).

Cierto es, sus contemporáneos tampoco le pudieron seguir[12]. La importancia del ensayo de D'Alembert radica en su *esfuerzo* –el primero– por obtener ecuaciones generales para una clase de movimientos bidimensionales de un medio continuo. Poseía D'Alembert una idea cinemática de la "fuerza aceleradora", pero desde luego no escribió nada que pudiera sugerir el concepto de presión en un fluido[13].

Un éxito grande y definitivo lo alcanzó D'Alembert con su *Ensayo sobre una nueva teoría de la resistencia de los fluidos,* presentado para el premio de Berlín de 1750. Aunque esta obra pudo explicar tan poco acerca de la resistencia como su anterior ensayo con respecto a los vientos, obtuvo, no obstante, ecuaciones en derivadas parciales correctas para flujos axialmente simétricos y planos del tipo actualmente denominados irrotacionales (fig. 82), si bien las hipótesis, tanto físicas como cinemáticas, a partir de las cuales las infirió D'Alembert son oscuras. D'Alembert pretende haber reducido la hidrodinámica a la hidrostática, la cual, afirma, ha sido reducido a su vez al "principio único de la experiencia, la igualdad de presión en todas direcciones". Sin embargo, en ninguna parte introduce la presión en el formalismo matemático. En la deducción de sus ecuaciones, se refiere a "fuerzas" en el interior pero toma éstas como aceleraciones de sentido contrario. Sus ecuaciones dinámicas son los casos particulares apropiados de la condición de que:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) \cdot d\boldsymbol{x} \text{ sea una diferencial exacta} \tag{20}$$

siendo $\boldsymbol{v}$ el campo de velocidades. De esta manera no aparece la presión en sus resultados.

12. La hidrodinamica de Euler (1750-1766)

Como director de la Academia de Berlín, Euler tuvo que leer ambos ensayos premiados de D'Alembert. Bien podemos conjeturar que le dieron el impulso final para la creación de su hidrostática e hidrodinámica generales. El lector actual ve en seguida que, aparte del cálculo de derivadas parciales, ya sólo faltaban dos elementos para llegar de un salto único a ecuaciones dinámicas generales del tipo por el que se esforzó D'Alembert en vano a lo largo de múltiples páginas. Estos fueron el principio general del momento lineal y el concepto general de presión interna.

Ambos elementos fueron rápidamente perfeccionados por Euler. Desde hacía ya muchos años había venido aproximándose al principio general del momento lineal, el cual denominamos hoy día la *primera ley de movimiento de Euler.* Para cualquier porción $\mathscr{V}$ de cualquier cuerpo, la fuerza resultante $\boldsymbol{F}(\mathscr{V})$ es igual a la derivada temporal del momento lineal $\boldsymbol{M}(\mathscr{V})$:

$$\boldsymbol{F}(\mathscr{V}) = \dot{\boldsymbol{M}}(\mathscr{V}). \tag{21}$$

Enunció este principio, en forma diferencial, finalmente en 1750, en calidad de única y suficiente ley general de la mecánica. Fue llevado al mismo mediante

---

[12] Véase la respetuosa y prudente evaluación de Euler, "Recensio Dissertationis de ventis", *Opera postuma* **2**, 793-797 (1862).

[13] Por supuesto que ocurre con frecuencia la palabra "presión", pero significa el peso de una porción de fluido.

Propoſitions ſuivantes, nous ne conſidérons que de pareils ſolides engendrés par la révolution de la figure *ADC* (Fig. 13) autour de l'Axe *AC*, & nous n'aurons égard qu'à une ſeule Section *ADC* par l'Axe, parce que le calcul doit être le même pour toutes les autres.

PROPOS. VIII. THEOREME.

45. *Les mêmes choſes étant poſées que dans l'*art. 43, *je dis que* $B' = -A - \frac{p}{z}$ *&* $A' = B$.

Soit KQM' (Fig. 17) la Courbe que décrivent les particules du Fluide infiniment proches de la ſurface AMN, & ſoient menées les ordonnées infiniment proches PNM', pnm'; NR perpendiculaire à pm', & NQ à AN ou QMm'; il eſt évident

1°. Que la viteſſe du Fluide en N ſuivant Nm, eſt en raiſon renverſée de la ſurface conique décrite par la révolution de NQ autour de FP. Donc la viteſſe en N eſt comme $\frac{1}{NQ \times PN}$. Donc ſi on appelle U la viteſſe ſuivant Nm, & qu'on faſſe $PN = z$ ou y, (*) on aura $NQ = \frac{a^2 a}{Uz}$, a étant la viteſſe en g, & a une conſtante, pour garder la loi des homogenes.

(*) Le point N peut être regardé, ou comme étant ſur la ſurface du corps, ou comme appartenant en général à une ligne

Fig. 82. Las ecuaciones generales del flujo irrotacional, axisimétrico, e isocórico, tal y como se publicaron en 1752 en el ensayo premiado de 1749 de D'Alembert

or il eſt aiſé de montrer que $\left(\frac{ddz}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{ddz}{dy\,dx}\right)$, d'où la vérité de cette propriété devient évidente.

XV. Maintenant je poſe pour abréger :

$$X = \left(\frac{du}{dt}\right) + u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right)$$

$$Y = \left(\frac{dv}{dt}\right) + u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dv}{dz}\right)$$

$$Z = \left(\frac{dw}{dt}\right) + u\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dw}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right),$$

& l'équation différentielle qui détermine la preſſion p eſt :

$$\frac{dp}{q} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz - X\,dx - Y\,dy - Z\,dz,$$

dans laquelle le tems t eſt ſuppoſé conſtant. Or l'autre équation tirée de la continuité du fluide eſt :

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d.qu}{dx}\right) + \left(\frac{d.qv}{dy}\right) + \left(\frac{d.qw}{dz}\right) = 0,$$

& ce ſont les deux équations qui contiennent toute la Théorie tant de l'équilibre que du mouvement des fluides, dans la plus grande univerſalité qu'on puiſſe imaginer.

XVI. Lorsqu'il eſt queſtion de l'équilibre, on n'a qu'à faire évanouïr les trois viteſſes u, v, & w, & puisque alors les quantités X, Y, & Z, évanouïſſent auſſi, toute la Théorie de l'équilibre des fluides eſt contenuë dans ces deux équations :

$$\frac{dp}{q} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \text{ le tems } t \text{ étant conſtant,}$$

& $\left(\frac{dq}{dt}\right) = 0,$

Fig. 83. Las ecuaciones fundamentales de la hidrodinámica de Euler, según se publicaron por primera vez, de las *Mémoires de l'Académie des Sciences*, Berlín, 1755

casos particulares en mecánica celeste, en la teoría de cables flexibles y barras articuladas entre sí, en la dinámica de sólidos rígidos, y en la teoría del sonido, así como en hidráulica también.

El concepto de presión interna ya lo tenía en hidráulica. Todo lo que quedaba por hacer era verlo en el espacio y combinarlo con el principio de la cantidad de movimiento. Y esto, efectivamente, fue lo que hizo Euler, casi al primer intento. Para explicar la presión interna, habla en 1750 de un elemento de agua como "sujeto a las presiones de las partículas de agua que lo rodean"; en su tratamiento siguiente (1752), de "las presiones con las cuales las partículas de agua en todas partes de hecho actúan unas sobre otras". El resultado es, claro está, la ecuación dinámica de Euler (11), en la cual, por vez primera, la presión es un campo variable en el espacio y el tiempo, y en lo único en que se queda corto con respecto a la tracción de Cauchy es que se supone que la presión es normal a la superficie sobre la que actúa. Aunque Euler nunca da ninguna explicación en palabras más completa ni más clara salvo en el caso del equilibrio, el tratamiento matemático de la presión es enteramente explícito y cristalino (fig. 83). Es más, resulta tan natural el concepto que, una vez logrado, uno sólo ha de fijarse en las ecuaciones, las cuales hablan por sí mismas. Los anteriores escritos del propio Euler acerca de hidrostática e hidrodinámica, donde solamente aparecen casos particulares, incluyen una motivación física más minuciosa. Esto no constituye más que uno de los múltiples ejemplos en la historia de la ciencia que indican que en cuanto se haya enunciado explícitamente una buena teoría matemática, comienza a desarrollarse la "intuición física" hasta tal punto que se convierte en "obvio" aquello que de hecho se ha obtenido como resultado final de largos conatos de pensamiento.

13. La fuerza cortante resultante y la teoría general de cables deformables de Euler (1771-1774)

Como todos sabemos, y como él mismo llegó a encontrar con el tiempo, fue demasiado precipitado Euler en su pretensión de que el principio de la cantidad de movimiento "incluye todas las leyes de la mecánica". Fue la teoría de la elástica y, por último, del cuerpo rígido, las que le revelaron el principio del momento de la cantidad de movimiento, a saber:

$$\boldsymbol{L}_{x_0}(\mathscr{V}) = \dot{\boldsymbol{H}}_{x_0}(\mathscr{V}), \tag{22}$$

donde $\boldsymbol{L}_{x_0}(\mathscr{V})$ y $\boldsymbol{H}_{x_0}(\mathscr{V})$ son, respectivamente, el par resultante y el momento de la cantidad de movimiento, con respecto a x_0, de la materia en $\mathscr{V}$, como una ley independiente e igualmente universal. Aquí[14] describiré únicamente el segundo gran fruto de la reconsideración que hizo Euler, ya mayor, de la teoría de los cables deformables. En su primera investigación acerca de la elasticidad (1727), había logrado tomar en cuenta una variación lineal de tensión sobre la sección recta de una viga flexionada con el fin de derivar la ley de flexión de Jaime Bernoulli a partir de la ley de extensión de Hooke. No obstante, se quedó insatisfecho con la base estática de la teoría de la elástica y buscó durante la mayor parte de su vida, en ensayos

[14] En cuanto al principio del momento de la cantidad de movimiento, véase el siguiente ensayo en este tomo.

que elaſticum, vel etiam vbi in ſtatu ſuo naturali non ſitum rectum tenet, ſed ſecundum curuam quamcunque datam ſit formatum, quocirca adhuc duos caſus ſequentes adiungamus.

Caſus Tertius pro filis inaequaliter elaſticis.

XV. Talis inaequalitas ſcilicet locum habere poteſt, ſi vel ipſum filum non vbique ſit aeque craſſum etiamſi ex eadem conſtet materia, vel ſi adeo ex diuerſis materiis fuerit compoſitum, hoc igitur caſu elaſticitas in ſingulis punctis, non ſimpliciter formulae $\frac{d\Phi}{ds}$ erit proportionalis, ſed praeterea a functione quadam pendebit, ad punctum quoduis M pertinente, vnde manifeſtum eſt hanc functionem per ipſam portionem fili $AM = s$, determinari debere, ſit igitur S iſta functio elaſticitatem abſolutam definiens, atque loco conſtantis illius A, caſu praecedente hic ſcribi oportebit S, ſicque tota ſolutio ſequenti modo ſe habebit: Ante omnia debet eſſe $V v = \frac{S d\Phi}{ds}$, cui inſuper vt ante adiungi conuenit has tres:

I. $dT + V d\Phi = p ds$; II. $dV - T d\Phi = q ds$; III. $d.Vv = V ds$

ex vltima aequatione ſtatim concluditur

$$V = \frac{S d d\Phi + dS d\Phi}{ds^2},$$

poſito elemento ds conſtante, hincque viciſſim

$$v = \frac{S ds d\Phi}{S dd\Phi + dS . d\Phi},$$

qui

Fig. 84. Las ecuaciones generales de Euler para la estática de un cable plano deformable, tomado de los *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* para el año 1770

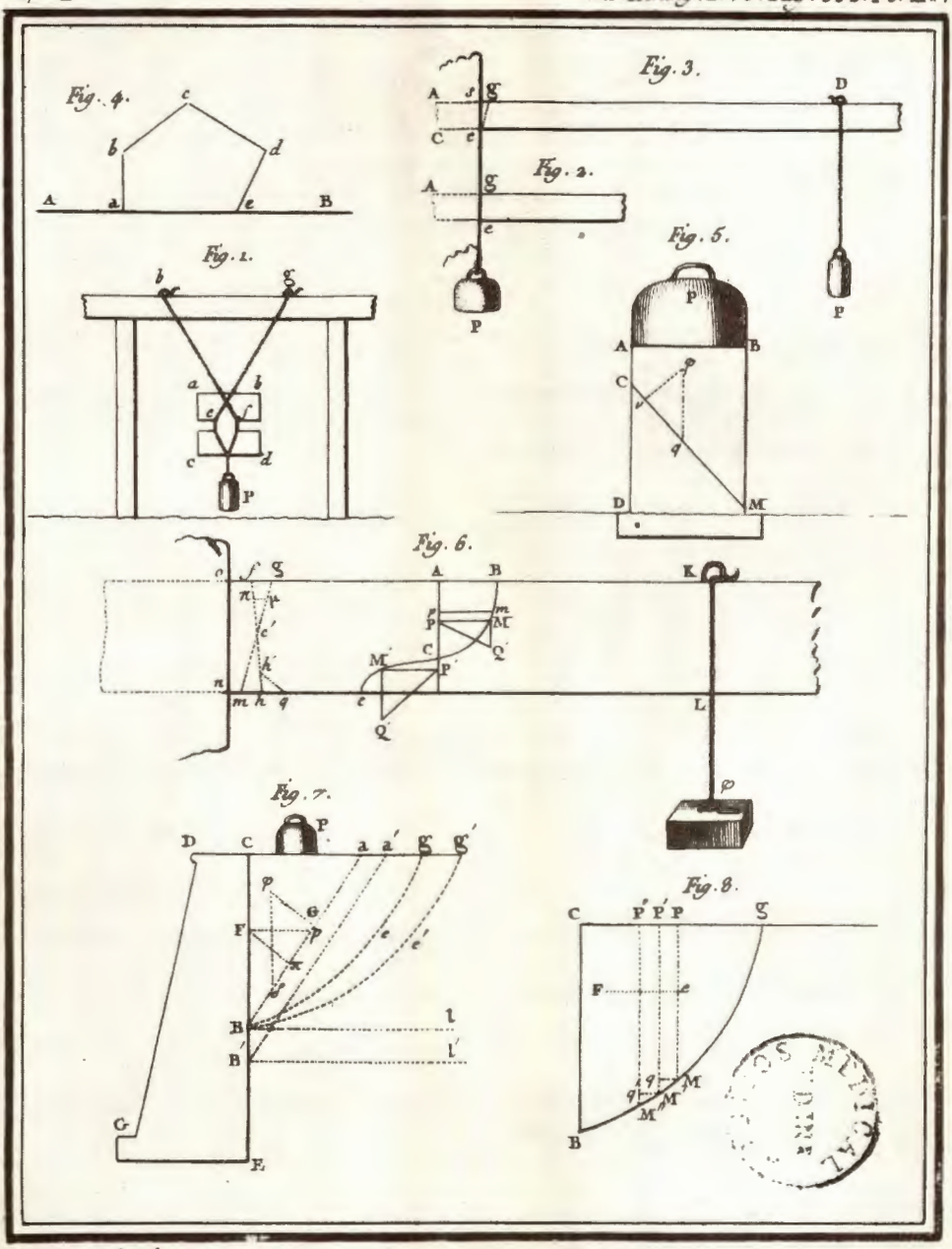


Fig. 85. Las figuras de Coulomb para la exposición de las tensiones y fuerzas cortantes en una viga voladiza no deformada

repetidos, establecer las ecuaciones de la elástica, al igual que las de la catenaria generalizada, directamente a partir del balance de fuerzas que actúan sobre una porción de la curva. El hecho de que esto es imposible fue una de las principales pruebas que le llevaron, por fin, a percibir que el equilibrio de momentos es una ley mecánica independiente, en el caso general, del equilibrio de fuerzas. Antes, sin embargo, de lograr este grado de claridad, se benefició de sus estudios de sistemas de fuerzas. En cierto pasaje escrito alrededor de 1742 en uno de sus cuadernos no publicados, calculó la fuerza que ha de suministrarse a un punto A en la elástica para que retenga su forma la banda a un lado de A cuando se recorta todo el material al otro lado de A. Encontró que no es tangencial; esto es, en general es necesaria una *fuerza cortante* además de la tensión que basta en el caso de un cable perfectamente flexible. En 1771 pudo por fin separar las ecuaciones estáticas de las ecuaciones constitutivas. Al introducir el esfuerzo resultante actuando sobre una curva plana como un vector de componentes tangencial y normal T y V, respectivamente, obtuvo Euler las ecuaciones dinámicas plenamente generales para el caso de que no existan pares distribuidos, a saber (fig. 84).

$$\begin{aligned} \frac{dT}{ds} - V\varkappa &= -B_t + \sigma \ddot{x}_t, \\ \frac{dV}{ds} + T\varkappa &= -B_n + \sigma \ddot{x}_n, \\ \frac{dM}{ds} - V &= 0, \end{aligned} \tag{23}$$

donde $\varkappa$ es la curvatura y M el momento flexor, donde s es la longitud de arco, y donde t y n denotan componentes tangencial y normal, respectivamente. Más tarde (1774), declaró el principio:

$$\boldsymbol{S}_+ = -\boldsymbol{S}_-, \tag{24}$$

donde $\boldsymbol{S} = T\boldsymbol{t} + V\boldsymbol{n}$ y donde los signos $+$ y $-$ se refieren a los efectos del material en los lados opuestos del punto considerado. Reconocemos este último resultado como la versión unidimensional del lema de Cauchy (4). Evidentemente, las dos primeras líneas de (23) pueden escribirse en la forma:

$$\frac{d\boldsymbol{S}}{ds} + \boldsymbol{B} = \sigma \ddot{\boldsymbol{x}}, \tag{25}$$

la cual es la versión unidimensional de la primera ley del movimiento de Cauchy, aunque apenas resulta típica de ésta.

14. El reconocimiento explícito del esfuerzo cortante por Coulomb (1773)

En una publicación que llegaría a ser célebre, Coulomb resucitó e hizo más explícitas las consideraciones de Parent. Concebía una variación arbitraria, tanto normal como tangencial, de las fuerzas que actúan sobre la sección recta de una viga sujeta a una carga transversa en el extremo. Estas fuerzas pueden considerarse, al igual

Fig. 86. Augustin Cauchy (1789-1857) según una litografía hecha por Jean Belliard, basándose en un dibujo de Jean Roller

que las de Parent, como esfuerzos interiores en el caso plano. De hecho, llegó Coulomb a plantear, en forma integrada, todas las ecuaciones de equilibrio para la sección; así concluyó que el área debajo de la curva de presiones ha de ser igual al que se halla debajo de la curva de tensiones, y calculó el esfuerzo cortante resultante en función de la carga (fig. 85). Superando a Parent, Coulomb fue el primero en considerar los esfuerzos actuando sobre planos diversos que pasan por un punto dado; calculó el esfuerzo cortante sobre un plano arbitrariamente inclinado con respecto a la dirección de la fuerza aplicada, en una viga supuesta en estado de compresión pura, llegando a demostrar que el esfuerzo cortante era máximo en un plano inclinado a 45°.

Hay que reconocer que las ideas de Coulomb eran claras pero no por ello deben exagerarse sus consecuciones. Faltándole mucho para alcanzar el nivel logrado por Euler en hidrodinámica y en la teoría de cables deformables, no obtuvo ninguna ecuación diferencial, ni auguró el tensor de esfuerzos.

15. Una observacion final acerca de Cauchy

De la exposición anterior, queda claro que cada elemento conceptual formando parte de la teoría de esfuerzos de Cauchy podía encontrarse en una u otra de las teorías especiales construídas en el siglo anterior. Por otra parte, en las investigaciones realizadas por Fresnel durante el período 1821-1822, las cuales seguramente conocería Cauchy, están más o menos implicados muchos de los resultados de éste, si bien en el estudio de Fresnel los conceptos de esfuerzo y deformación siempre se relacionan mediante una hipotética respuesta linealmente elástica.

Así podría parecer que fue fácil la labor realizada por Cauchy al formular y desarrollar la teoría general del esfuerzo. No lo fue. El concepto de Cauchy tiene la sencillez de lo genial. Su profunda y penetrante originalidad sólo queda plenamente perfilada contra el fondo del siglo de consecuciones por parte de los brillantes geómetras que precedieron, tratando casos particulares y casos de cuerpos deformables mediante métodos complicados y a veces incorrectos sin jamás dar con esta idea fundamental, la cual, a partir de su creación, de inmediato se hizo y ha permanecido siendo la base de la mecánica de los cuerpos finitos.

No hay nada más difícil de superar que un cuerpo de conocimientos ciertos pero excesivamente particulares. El forjar de nuevo la tradición de sus antepasados es la máxima originalidad que pueda poseer un hombre.

Nota bibliografica

La conferencia impresa aquí fue leída en el Centro para la Filosofía de la Ciencia, Universidad de Minnesota, en el año 1967. Se basa en y reemplaza a dos artículos anteriores:

Zur Geschichte des Begriffes "innerer Druck", *Physikalische Blätter* **12**, 315-326 (1956).

Stages in the development of the concept of stress, *Problems of Continuum Mechanics* (Muskhelisvili Anniversary Volume), págs. 556-564 (págs. 439-447 de la edición rusa), (1961).

El primero de estos artículos, a su vez, se desarrolló a partir de una conferencia dada en el Instituto de Ciencias Matemáticas, Universidad de Nueva York, en el año 1954.

V. ORIGEN DE LA LEY DEL MOMENTO DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

1. LA FORMA NORMAL DE LA LEY DEL MOMENTO DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO PARA LOS FISICOS

Si bien es verdad que la mecánica vulgarmente se concibe como una parte de la física, no se debe precisamente a los físicos el hecho de que las últimas dos décadas han visto un nuevo florecimiento de la mecánica clásica, del cual una parte importante se dedica a sus aplicaciones, ciertamente, pero más importancia todavía cobra el desarrollo de la teoría básica, el cual se va presentando en un pequeño torrente de libros, así como en media docena de revistas fundadas expresamente para este propósito. Al físico típico le parece que la mecánica clásica es un capítulo acabado de la filosofía natural. Sin embargo, casi nada de lo que aprendió acerca de la misma en la apresurada introducción incluida en su formación en física teórica se concibe como correcto en general, ni mucho menos bien presentado, por el moderno teórico de mecánica pura.

El principio del momento de la cantidad de movimiento ilumina una bifurcación tanto en método como en punto de vista tan definitiva como cualquier demarcación profesional de nuestro tiempo. Recordemos cómo se enuncia el principio en un típico libro de texto de física. Para concretar, escogemos la *Física Teórica* de Joos[1], aunque casi cualquier otro texto serviría igual de bien, exceptuando a los más recientes, que a menudo son menos cuidadosos a la hora de constatar explícitamente lo que se hace. En primer lugar, en un sistema de masas puntuales, la ecuación de movimiento de la partícula k-ésima es

$$m_k \ddot{\boldsymbol{r}}_k = \boldsymbol{F}_k + \sum_i \boldsymbol{F}_{ik}, \tag{1}$$

en la notación standard. A continuación, se afirma la "tercera ley de Newton de la igualdad de la acción y la reacción" en la forma $\boldsymbol{F}_{ik} = -\boldsymbol{F}_{ki}$.

Formando ahora $\dot{\boldsymbol{H}}$, donde el momento de la cantidad de movimiento $\boldsymbol{H}$ se define como sigue:

$$\boldsymbol{H} = \sum_k \boldsymbol{r}_k \times m_k \dot{\boldsymbol{r}}_k, \tag{2}$$

se demuestra que:

$$\dot{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{L} + \tfrac{1}{2} \sum_{k,j} (\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j) \times \boldsymbol{F}_{jk}, \tag{3}$$

donde $\boldsymbol{L}$ es el momento total ejercido por las fuerzas externas:

$$\boldsymbol{L} \equiv \sum_k \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_k. \tag{4}$$

---

[1] G. Joos, *Theoretical Physics*, Nueva York, Stechert, 1934. Los párrafos a los que nos referimos están en págs. 101, 103-104, 135-145, 158-160.

Si las fuerzas mutuas $\boldsymbol{F}_{jk}$ son centrales, de modo que $(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j) \times \boldsymbol{F}_{jk} = \boldsymbol{0}$, entonces (3) se reduce a:

$$\dot{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{L}, \tag{5}$$

esto es, la ley que se quería demostrar. Joos enuncia el resultado como sigue: "Para un sistema de partículas en el cual las fuerzas entre dos partículas cualesquiera actúan en la dirección de la recta que une dichas partículas, la derivada temporal del momento angular total es igual a la suma de los momentos de las fuerzas aplicadas." Nadie puede criticar esta afirmación ni tampoco su demostración. No obstante, Joos no ve tan clara la *relevancia* del resultado, pues añade el siguiente comentario, escrito en letra pequeña:

"La restricción hecha arriba en realidad tiene poca importancia. A partir de consideraciones de simetría, es difícil imaginar una fuerza actuando entre dos puntos que no coincida en dirección con la línea que une ambas, pues no hay ninguna otra dirección preeminente. Si la ley de *Biot-Savart* (pág. 290) parece una excepción, debe recordarse que esta ley trata de la fuerza entre un polo magnético y un *segmento* elemental (esto es, no un punto o partícula) de un conductor eléctrico."

A pesar de sus reservas, Joos aplica la ecuación (5) explícitamente a un cuerpo rígido, empezando con casos sencillos para acabar con las ecuaciones del movimiento debidas a Euler. No afirma nada acerca de las fuerzas internas que existan entre las partículas que se supone constituyen el cuerpo rígido, las cuales supuestamente deben ser un conjunto finito, ya que (5) se derivó sólo para sistemas finitos. Más tarde trata los medios continuos, haciendo particular hincapié en los cuerpos elásticos en equilibrio. Afirma que hay "dos tipos de fuerza operando". Además de "fuerzas como la de la gravedad", existen "fuerzas que operan sobre las partículas superficiales, las cuales se deben a la presencia de las partículas contiguas". Estas últimas "no son proporcionales al volumen del elemento, sino al área de su superficie". Denotando fuerzas del primer tipo por $\boldsymbol{g}$, y aquellas del segundo tipo por $\boldsymbol{P}$, Joos pretende aplicar "las ecuaciones fundamentales de la mecánica de sistemas de partículas" de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \int \boldsymbol{g}\, d\tau + \oint \boldsymbol{P}\, dS &= \boldsymbol{0}, \\ \int \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{g}\, d\tau + \oint \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{P}\, dS &= \boldsymbol{0}. \end{aligned} \tag{6}$$

A partir de este comienzo, deriva varias de las ecuaciones de la mecánica de medios continuos, tales como aquella que afirma la simetría del tensor de esfuerzos siguiendo el método acostumbrado. Nunca vuelve a mencionar el momento angular, y nunca escribe una ecuación de la forma (5) para medios continuos. No obstante, indirectamente supone que el tensor de esfuerzos permanece simétrico en los problemas cinéticos de elasticidad y viscosidad lineal tanto como en los estáticos[2].

[2] Este supuesto está bien escondido. En la pág. 169 deriva las ecuaciones cinéticas de la elasticidad lineal a partir de las ecuaciones estáticas, añadiendo a las fuerzas de volumen "las fuerzas inerciales dadas por el principio de D'Alembert". En la pág. 205, obtiene la fórmula para la viscosidad lineal diciendo: "Con el fin de calcular las tensiones sobre un elemento de volumen de un fluido viscoso nos podemos valer de las fórmulas de la teoría de la elasticidad..." El principio dinámico que emplea en elasticidad es insuficiente para obtener las ecuaciones de la viscosidad lineal, las cuales afirma de hecho basándose en una *analogía* (imaginativa) a la elasticidad, sin aplicar principio mecánico alguno.

Repito aquí que el libro de Joos se escogió tan sólo para dar un ejemplo típico del desarrollo y uso del momento de la cantidad de movimiento por parte de los físicos. La literatura de los libros de texto es tan extensa que habrán de existir algunas variaciones, aunque el punto de vista que he encontrado más frecuentemente en conversaciones con físicos practicantes sugiere que su formación debió seguir, en líneas generales, el esquema arriba bosquejado.

Pocos especialistas en mecánica, si es que alguno siquiera, conciben su materia de esta manera. Para ellos, la mecánica clásica se basa en tres leyes fundamentales, las cuales afirman la conservación o el equilibrio de *fuerzas, momentos* o *pares,* y *trabajo,* o bien, en otros términos, de la *cantidad de movimiento,* del *momento de la cantidad de movimiento,* y de la *energía*[3]. Consideran a la ecuación (5) por sí sólo como el enunciado de la segunda ley fundamental. No conciben el principio del momento de la cantidad de movimiento como una consecuencia del principio del momento lineal ni de las "leyes de Newton" ni de ningún otro principio más inmediato[4].

Aquellos que cultivan la mecánica encuentran con facilidad media docena de errores de lógica y de método en la aproximación a la materia más usual en los físicos. Estos, en cambio, rara vez consienten en considerar a (5) como una ley fundamental sino que insisten que procede, o que al menos debería derivarse de las leyes de Newton o de las ecuaciones "newtonianas"[5]. Su extremada reverencia

---

[3] Se debe mayormente al extendido e intensivo estudio de la dinámica de los gases que tuvo lugar en la década de 1940-1950 el que llegara a ser en cierta medida entendido el principio de la energía por un grupo importante de científicos, aunque había sido empleado de cuando en cuando en problemas mecánicos durante un siglo entero.

Una presentación general y detallada de los tres principios viene dada por C. Truesdell & R. A. Toupin en *The Classical Field Theories,* Handbuch der Physik III/1 (1960). Debido a la reciente tendencia de escribir monografías especializadas, incluso como libros de texto para principiantes, es difícil poder citar una introducción a la mecánica moderna a un nivel elemental comparable al libro de Joos para físicos. Las obras sobre elasticidad destacan la independencia de los dos primeros principios pero, por lo general, desatienden al tercero. Las obras que tratan de la dinámica de gases dan énfasis a la independencia del tercer principio pero a menudo menosprecian al segundo.

[4] Claro está que son posibles otras disposiciones formales. Por ejemplo, puede formularse un principio "variacional" (esto es, una expresión formal en variaciones, no un verdadero principio de mínimo) suficientemente general para ser equivalente a las dos primeras leyes, o incluso a las tres en conjunto.

[5] En este ensayo empleo el término *Leyes* de Newton para denotar las leyes de hecho enunciadas por Newton; y el de *ecuaciones "newtonianas"* para indicar las diversas ecuaciones, de las cuales la (1) es representativa, que se han alegado en los textos de física como enunciados de las Leyes de Newton. Pueden encontrarse ejemplos de los usos variados de los escritores físicos en la nota de pie de página núm. 8 del artículo de J. C. C. McKinsey, A. C. Sugar, & P. Suppes, "Axiomatic foundations of classical particle mechanics", J. Rational Mech, Anal. 2, 253-272 (1953). Aquí cito yo más ejemplos: W. V. Houston, *Principles of Mathematical Physics,* Nueva York, McGraw-Hill, 2.ª ed., 1948, en § 3 del cap. 2 denomina a la igualdad $\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji}$ la "tercera ley de Newton" e infiere que "es un enunciado de la conservación del momento [lineal]"; en § 5 afirma que "en gran número de casos se satisface" la condición adicional: $(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \times \boldsymbol{F}_{ij} = 0$. En § 2 de cap. IX, deja claro Houston que *no* considera a esta última como condición general; véase la nota de pie de página núm. 26 abajo. J. L. Synge & B. A. Griffith, en § 1.4. de su texto *Principles of Mechanics,* Nueva York, McGraw-Hill, 2.ª ed.,1949, y entre las leyes que afirman ser "equivalentes a aquellas utilizadas por Newton", incluyen: $(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k) \times \boldsymbol{F}_{jk} = 0$, "lo que se puede resumir diciendo: la acción y la reacción son iguales y opuestas". No obstante, no llegan a afirmar que todas las fuerzas mutuas son binarias. Estos ejemplos son, sin embargo, demasiado claros para ser típicos. Pasemos al *Vorlesungen über theoretische Physik,* 1, *Mechanik* de A. Sommerfeld, Leipzig, Akad, Verlagsg., 5.ª ed., 1955. Allí en § 1 se citan al pie de la letra las propias leyes de Newton y se toman como axiomas; en § 13, se infiere $\boldsymbol{F}_{jk} = -\boldsymbol{F}_{kj}$ a partir de "actio = reactio"; dos páginas más adelante se nos dice que hemos

por lo que ellos consideran debió ser el punto de vista newtoniano parece proporcionar el motivo de su tendencia de rechazar cualquier crítica e incluso desviaciones importantes del mismo, como mera pedantería matemática.

En otra ocasión tengo la intención de estudiar toda esta cuestión en más profundidad. Aquí sólo deseo bosquejar un análisis histórico. ¿Cómo surgieron estos dos puntos de vista y cómo divergieron? ¿De dónde procedió el principio del momento de la cantidad de movimiento? Todavía no he descubierto todo lo que busco acerca de ambas preguntas. No obstante, a mí me parece que la investigación sobre la historia de la mecánica racional sigue siendo lo bastante novedoso como para que un ejemplo de método en acción, antes de conocerse cuáles conjeturas son las correctas ni cuáles pistas apuntan hacia los fines buscados, podría acaso ser bienvenido en un círculo acostumbrado a estudios de una filosofía natural más antigua y de menor formalismo matemático.

2. Los dos conceptos de la ley del momento de la cantidad de movimiento

Para comenzar, hemos de decidir cuál es, en realidad, el problema. Volviéndonos la espalda a la física, la metafísica y el prejuicio, si queremos obtener resultados sólidos en esta cuestión, debemos empezar por ver *cómo se utiliza el principio del momento de la cantidad de movimiento en la actualidad.* Para sistemas puntuales sólo sirve de utensilio en la integración. Este hecho apoya el punto de vista de los físicos de que es un principio subsidiario y derivado. Para cuerpos rígidos o deformables, es de poca utilidad en la resolución de problemas particulares pero, en cambio, es uno de los dos principios básicos a partir de los cuales se derivan comúnmente las ecuaciones dinámicas. Tanto las ecuaciones de Euler para cuerpos rígidos como la simetría del tensor de esfuerzos de un medio deformable se siguen del principio del momento de la cantidad de movimiento. Si intentamos seguir a los físicos aquí, vemos que para ellos, el citado principio sirve para *esquivar la necesidad de especificar las fuerzas mutuas entre las partículas componentes de un cuerpo rígido o deformable.* Basta que las fuerzas mutuas no contribuyan nada al momento o par resultante. En este sentido entenderemos el problema. Para nosotros, en cambio, no será el resultado trivial de tomar el producto vectorial de (1) por $\boldsymbol{r}_k$ y sumar sobre k lo que se verá como el principio del momento de la cantidad de movimiento, sino directamente la ecuación $\dot{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{L}$ donde $\boldsymbol{L}$ es el par de sólo las fuerzas aplicadas, bien sea en la forma (4) para sistemas evidentemente puntuales, o bien en la forma más general aplicable a cuerpos que ocupan un volumen finito. Por tanto, rastrearemos los orígenes de dos afirmaciones:

A. *El par resultante de un sistema de fuerzas mutuas es cero, bien sea como una consecuencia de las leyes de Newton, de "ecuaciones newtonianas", o bien por otras razones.*

B. *La ecuación* $\dot{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{L}$ *es una ley fundamental e independiente de la mecánica.*

---

de concluir que $\boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_{ik} + \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ki} = 0$ mediante la observación de una figura donde ¡se representan a las fuerzas como centrales! Ejemplos tales podrían multiplicarse indefinidamente.

3. ACERCA DEL HECHO DE QUE NI NEWTON, NI HUYGENS, NI LAGRANGE LLEGARON A PUBLICAR NADA SOBRE LOS DOS CONCEPTOS

Para apoyar a la Afirmación A, un principiante acaso se referiría al *Principia* de Newton, pero en seguda se daría cuenta de que:

Dato 1. En el *Principia* de Newton no aparece ni la Afirmación A ni la B en ningún lugar. Tampoco se afirma jamas que $(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j) \times \boldsymbol{F}_{jk} = \mathbf{0}$.

Frecuentemente he visto a físicos quedarse sorprendidos por esta conclusión, a veces hasta el extremo de negarse a creerlo. No obstante, en verdad debería conformarse a la fe muy extendida en la naturaleza empírica de la ciencia. Para mí, el primer principio de la investigación histórica de la mecánica es que el sentido o significado de un concepto o principio ha de inferirse de su uso, ya que la aplicación fructuosa siempre ha precedido el enunciado del principio utilizado. Al no haber en el libro de Newton ninguna teoría de sistemas dinámicos generales, de cuerpos rígidos[6], o del esfuerzo en el seno de un medio continuo, no debería sorprender al empirista el aprender que el sistema de mecánica del propio Newton no era lo bastante general como para dar lugar a tales teorías. El hecho de que Huygens fuera el primero en resolver un problema no trivial de rotación, a saber, el problema del centro de oscilación, podría animar al principiante a intentar leer el *Horologium Oscillatorium* y otras obras de Huygens, pero tendría que añadir:

Dato 2. En la solución del problema del péndulo físico de Huygens no aparece nada en absoluto respecto a la Afirmación A ni la Afirmación B.

Ninguno de estos dos datos podrá desconcertar a un historiador de la ciencia, pues, basándose en sus conocimientos generales, no esperará encontrar ningún desarrollo de la mecánica en conjunto según líneas "newtonianas" en el propio Newton ni en nadie más antes de mediados del siglo diecinueve. Tampoco esperará ver el enunciado del principio *general* del momento de la cantidad de movimiento antes del descubrimiento de su primera gran aplicación, a saber, la teoría del movimiento

---

[6] No implica este hecho que nunca había pensado Newton en estas cuestiones, como se demuestra con el famoso comentario que sigue a la Ley I; "Una peonza, cuyas partes debido a su cohesión constantemente se alejan mutuamente de los movimientos rectilíneos, no cesa de girar excepto en la medida en que es retardado por el aire". Sería interesante ver si hay entre los estudios de Newton algo matemático acerca del movimiento de cuerpos rígidos.

Nota añadida para la reimpresión, 1967. Tal estudio ha sido hallado por J. W. Herivel y publicado como Manuscrito V en su libro *The Background to Newton's Principia,* Oxford, Clarendon Press, 1965. A pesar de que concluye Herivel en la pág. 82 que: "Está claro que la intuición infalible [de Newton] le había llevado a una apreciación física casi perfecta del problema", no encuentro buenos motivos en § 8 de Manuscrito V para alabanza tan absoluta. Cierto es que Newton percibe que es posible la rotación libre únicamente alrededor de ciertos ejes, no todos, pero a la hora de tratar el movimiento alrededor de otros ejes, parece confundir, como a veces lo hacían otros escritores tempranos con respecto al péndulo y a la cuerda vibrante, efectos de rozamiento con los de inercia. Por ejemplo, llega prácticamente a afirmar que el único movimiento periódico que puede tener un cuerpo rígido libre es el de una rotación alrededor de su eje principal: "Y a medida que el eje se mueve continuamente en el cuerpo, así también se mueve continuamente en el espacio con algún tipo u otro de movimiento en espiral, siempre acercándose más y más hacia un centro o paralelismo consigo mismo, pero sin alcanzarlo nunca. Verdaderamente está tan lejos de jamás mantenerse paralelo a sí mismo que nunca estará dos veces en la misma posición".

Evidentemente, el hecho de que en esta breve nota no llegara Newton a aproximarse más a las verdaderas leyes dinámicas de los cuerpos rígidos no significa ningún reproche para él y no debería sorprendernos que así fuera. La nota es ya de por sí notable, prescindiendo de la exagerada interpretación que le concede Herivel.

más general de un cuerpo rígido. Es más probable que comience por examinar el material presentado en el primer tratado sistemático de dinámica analítica, la *Méchanique Analitique* de Lagrange, publicado en 1788, con lo que divide por la mitad el período que separa a Newton y Huygens de los tratadistas de fines del siglo pasado[7]. En la *Méchanique Analitique,* la ley fundamental de la mecánica es el principio de los trabajos virtuales. A partir del mismo, Lagrange deduce con facilidad las integrales generales de la energía, la cantidad de movimiento, y el momento de la cantidad de movimiento para un sistema de masas puntuales. Puesto que cualesquier fuerzas que no realicen trabajo pueden excluirse de la expresión para el trabajo virtual, podemos inferir que en las ecuaciones lagragianas de la forma $\dot{H} = L$, las fuerzas mutuas no contribuyen a L. No obstante, el hecho es que *Lagrange* no lo dice. Cuando buscamos la explicación de algún concepto en los escritos de Lagrange, normalmente lo hacemos en vano. En el caso que estamos tratando, lo único que encontramos es que las fuerzas son "aquellas que en el mismo instante actúan sobre cada punto de masa m a lo largo de ciertas direcciones dadas, esto es, las velocidades que cada una de estas fuerzas imprimiría a la masa m si actuasen por separado e igualmente durante el tiempo tomado como unidad. Por variable que sea la acción de estas fuerzas, no obstante, se la puede considerar como constante durante un instante". También habla de las fuerzas aceleradoras como "tendiendo a centros dados." Aparte de la falta de precisión de esta afirmación, que recuerda la manera de expresarse de D'Alembert, vemos aquí la típica vaguedad evasiva de Lagrange. De hecho, en su enunciado de la ley de las áreas[8], Lagrange nos hace sospechar que *no* percibe la generalidad de la integral del momento de la cantidad de movimiento, pues sólo aduce ejemplos donde se anula el par sobre cada cuerpo por separado: "Si el sistema no estuviera sujeto a ninguna fuerza aceleradora, o si las únicas fuerzas presentes tienden todas al punto que hemos escogido como origen de coordenadas..." La exploración de otras partes del libro confirma el siguiente:

Dato 3. No hay nada en la *Méchanique Analitique* que sea relevante a la Afirmación B; en cuanto a la Afirmación A, puede inferirse a partir del tratamiento de Lagrange que fuerzas que no realizan trabajo virtual alguno no contribuyen al par resultante, aunque el propio Lagrange no da muestras de haberse percatado de este hecho.

El historiador consultará la *Méchanique Analitique* por un segundo motivo también, a saber, que en las secciones que encabezan las diversas partes del libro, incluye la primera historia de la mecánica. Aquél que lea dicha historia evitará

---

[7] *Méchanique Analitique,* París, Veuve Desaint, 1788. El principio general viene enunciado en la Seconde Section de la Seconde Partie; se obtienen las integrales en la Troisième Section. La historia a la que nos referimos viene en la Section Première. En la segunda y posteriores ediciones, tal como se vuelven a imprimir en *Oeuvres* I I de Lagrange, hay modificaciones considerables en la primera y segunda secciones, pero no afectan materialmente a la historia a la cual me refiero aquí, y aunque se rehace el desarrollo entero del principio de los trabajos virtuales, no llega éste a hacerse más lúcido.

Lagrange ofrece lo que él considera un tratamiento mejorado en su *Théorie des Fonctions Analytiques,* París, Imp. République, An V (1797) = *Oeuvres* 9. Afirma en § 205 que las fuerzas mutuas son centrales y son análogas a fuerzas de ligadura; en § 217 deriva la integral del momento de la cantidad de movimiento para un sistema sujeto a ligaduras holónomas independientes del tiempo.

[8] Párrafo 7 de la Troisième Section en la primera edición.

la necesidad de consultar las obras secundarias[9], puesto que, con respecto a la mecánica racional desde tiempos de Galileo, éstas hacen poco más que citar, parafrasear, ampliar, o corregir en sus detalles los pequeños bosquejos de Lagrange.

Lagrange escribe que la ley de las áreas "... parece haber sido descubierta al mismo tiempo por los señores Euler, Daniel Bernoulli, y el Chevalier D'Arcy, si bien en formas diferentes. Según los dos primeros, este principio consiste en el hecho de que en el movimiento de varios cuerpos alrededor de un centro fijo, la suma de los productos de la masa de cada cuerpo por la velocidad de circulación alrededor de su centro y por la distancia que dista del mismo centro es siempre independiente de la acción mutua que los cuerpos puedan ejercer entre sí, y permanece constante en tanto que no hay ni acción exterior ni obstáculo exterior... El principio de D'Arcy... afirma que la suma de los productos de la masa de cada cuerpo por el área que su radio vector barre alrededor de un centro fijo es siempre proporcional al tiempo. Está claro que este principio es una generalización del bello teorema de Newton acerca de las áreas descritas en virtud de fuerzas centrípetas arbitrarias..."

Si bien es verdad que el libro de Lagrange es un buen lugar para comenzar, la experiencia me ha llevado a formular las siguientes hipótesis de trabajo:

1. Había poco de nuevo en la *Méchanique Analitique;* su contenido procede de trabajos anteriores del propio Lagrange[10] o de las obras de Euler y otros predecesores.
2. Lagrange no comprende o concede poca importancia a los principios y conceptos generales de la mecánica.
3. Los bosquejos históricos de Lagrange suelen dar las referencias correctas pero tergiversan o menosprecian el contenido de las mismas.

Cuando leemos el comentario sarcástico de Lagrange acerca de D'Arcy, "... incluso llegó a convertirlo en una especie de principio metafísico, al cual llama la *conservación de la acción...,* como si nombres vagos y arbitrarios fuesen la esencia de las leyes de la naturaleza y pudiesen mediante alguna virtud secreta llevar a causas finales ciertas consecuencias sencillas de las conocidas leyes de la mecánica", nuestras hipótesis 3 y 2 sugieren que acaso D'Arcy había dado con algo importante. Sin

---

[9] E. Mach, *Die Mechanik in ihrer Entwicklung,* 1883; E. Jouguet, *Lectures de Mécanique,* 1908-1909; R. Dugas, *Histoire de la Mécanique,* 1950.

[10] Vg., ya antes se habían derivado las famosas ecuaciones lagrangianas, a saber, en § § 7-11 de su "Théorie de la libration de la lune, et des autres phénomènes qui dependent de la figure non sphérique de cette planète", *Nouv. Mém. Acad. Berlin* 1780, 203-209 (1782)= *Oeuvres* 5, 5-122. Aquí comienza Lagrange por escribir las fuerzas inerciales en coordenadas cartesianas rectangulares, mientras que las fuerzas aceleradoras vienen expresadas en términos de distancias desde "centros cualesquiera" (§ 5). Afirma (§ 13) que son válidas las ecuaciones lagrangianas para "una infinidad de partículas sujetas a cualesquier fuerzas proporcionales a funciones de las distancias"; es incierto el significado de esta frase, pero para todos los que se me ocurre, es en general falso. No llega Lagrange en este trabajo a derivar las ecuaciones del movimiento de un cuerpo rígido mediante su método.

Asimismo, las integrales generales derivadas en la *Méchanique Analitique* ya se entreven en el estudio, "Remarques générales sur le mouvement de plusieurs corps qui s'attirent mutuellement en raison inverse des carrés des distances", *Nouv. Mém. Acad. Berlin* 1777, 155-172 (1779)= *Oeuvres* 4, 401-418; este trabajo se basa en las ecuaciones "newtonianas" con una función potencial "newtoniana". Aunque es cierto que en § § 4-8 deriva Lagrange las integrales de la cantidad de movimiento, momento de la cantidad de movimiento, y energía, el uso de propiedades particulares de la función potencial tiende a oscurecer sus significados. Para tres cuerpos, los resultados vienen dados en § II de su "Essai sur le problème des trois corps", *Prix de l'acad. sci. Paris* 9, 1772= *Oeuvres* 6, 229-324.

Finalmente, el principio de los trabajos virtuales, sobre el que descansa toda la *Méchanique*

embargo, resulta ser una pista falsa; encontramos que D'Arcy *supone* que $\dot{H} = 0$ para cuerpos que "actúan entre sí de cualquier manera, bien sea mediante alambres, o líneas inflexibles, bien por leyes de atracción, *etc*"[11]. Como justificación sólo dice, "Es sabido que un cuerpo cuyas partes están todas conectadas entre sí, no puede comenzar ningún movimiento en virtud de las acciones recíprocas de éstas".

Volviendo a la Hipótesis 1, podemos optar por explorar primero las obras anteriores del propio Lagrange. Pero resulta que el ir recorriendo sus *Oeuvres* hacia atrás es un proceso lento y fastidioso. La tarea se aligera haciendo uso de una cuarta hipótesis de trabajo:

4. Las mejores ideas de Lagrange en mecánica proceden de su período más temprano, cuando estudiaba los trabajos de Euler y aún no había caído bajo la influencia personal de D'Alembert.

Así, pues, nos vamos directamente a su trabajo sobre mínima acción de 1760[12]. Aquí encontramos que la integral de área de la cinética se sigue del principio de mínima acción "si el sistema es enteramente libre, o bien si está obligado a moverse alrededor de un punto fijo, y si todas las fuerzas que actúan sobre los cuerpos se reúnen en este punto..." Se dan aquí las mismas referencias a las obras de Euler, Daniel Bernoulli, y D'Arcy que más tarde aparecerán en la *Méchanique Analitique*. La ley (5) no se menciona nunca ni se utiliza para nada[13].

4. El trabajo fundamental de Jaime Bernoulli sobre el centro de oscilacion (1686-1703)

Dado que la exploración de otras publicaciones acerca de sistemas dinámicos generales[14] tampoco llega a revelarnos nada que nos aproxime hacia las respuestas

---

Analitique, ya lo había formulado con más de veinte años de anterioridad en sus "Recherches sur la libration de la lune, dans lesquelles on tâche de résoudre la question proposeé par l'Académie royale des sciences pour le prix de l'année 1764", *Prix de l'acad. sci. Paris* 9, 1764 = *Oeuvres* 6, 5-61.

[11] Véase el razonamiento basado en la fig. 2 de su estudio, "Principe générale de dynamique, qui donne la relation entre les espaces parcourus et les temps, quel que soit le système de corps que l'on considère, et quelles que soient leurs actions les unes sur les autres" (leído en 1746), *Mém. Acad. Sci. Paris* 1742, 348-356 (1752), y una adición de 1747, págs. 356-361. No es fácil de leer este estudio. No se añade nada en su trabajo posterior, "Réflexions sur le principe de la moindre action de M. de Maupertuis", *Mem. Acad. Sci. Paris* 1749, 531-538 (1753).

[12] § XII de "Application de la méthode exposée précédente à la solution de différens problèmes de dynamique", *Misc. Taur.* 2_2 (1760-1761), 196-298 1762 = *Oeuvres* 1, 365-468.

[13] Vg., en § § XXXIV-XXXIX hay cálculos increíblemente elaborados para derivar las ecuaciones del movimiento de un cuerpo rígido a partir del principio de mínima acción. Utiliza Lagrange notaciones asimétricas que complican las fórmulas. No dice explícitamente que sea rígido el cuerpo que trata, pero el hecho es que, de otro modo, los resultados serían por lo general incorrectos. Las magnitudes suyas, [P] [Q] [R], de hecho son componentes angulares de $\dot{H}$, aunque en ningún lugar lo dice. No hay ni rastro del concepto de par.

[14] El *Traité de Dynamique* (1743) de D'Alembert no contiene alusión alguna al momento de la cantidad de movimiento, a pares, ni a la integral de área, aunque los Capítulos II y IV de la Seconde Partie tratan de las integrales de la cantidad de movimiento y de la energía, respectivamente.

Las ecuaciones "newtonianas" *generales* para el movimiento de una sola masa puntual hacen su primera aparición en § 18 del estudio de Euler, E 112 de 1747, "Recherches sur le mouvement des corps célestes en générale", *Mém. acad. sci. Berlin* [3] (1747), 83-143 (1749) = *Opera Omnia* II 25, 1-44. En 1744 había sido el primero en plantear ecuaciones "newtonianas" para un sistema de n masas puntuales sujetas a una ley de fuerzas particulares; véase § 26 de E 174, "De motu corporum flexibilium", *Opusc.* [*var. arg.*] 3, 88-165 (1751) = *Opera omnia* II 10, 177-232. Había derivado las integrales del momento lineal y de la energía cinética para este sistema pero no se había fijado en la integral del momento del momento lineal.

a nuestras preguntas, hemos de examinar las investigaciones realizadas sobre cuerpos de volumen finito. Al mismo tiempo, en seguida vemos que las referencias de Lagrange a Euler y Daniel Bernoulli nos llevan a publicaciones en las cuales el cuerpo rígido juega un papel esencial. Sin embargo, en vez de ir retrocediendo laboriosamente hacia atrás, saltamos de golpe al lugar donde debimos de haber comenzado, si no hubiera hecho falta luchar contra la creencia actualmente muy extendida de que la masa puntual es el principio y el fin de la mecánica. Me refiero al gran trabajo sobre el centro de oscilación publicado por Jaime Bernoulli en el año 1703[15] (fig. 87a, b). Como sugiere su mismo título, este trabajo aplica el *principio de la palanca* al movimiento de un péndulo. Ahora bien, el "principio de la palanca" no es más que el equilibrio de momentos. Como es bien sabido, esta publicación de Jaime Bernoulli contiene el germen del principio de D'Alembert-Euler de que las aceleraciones invertidas son equipolentes a fuerzas por unidad de masa. La combinación de estos dos principios da lugar, de modo inmediato, a la ecuación (5). Claro está que no encontramos en el trabajo de Bernoulli ni un enunciado general de (5), ni siquiera un enunciado explícito en el contexto del problema del péndulo; no obstante, reconocemos aquí el *uso* del principio para determinar el centro de oscilación. La cuestión es ahora: ¿Intentó Bernoulli demostrar el principio generalizado de la palanca a partir de otra cosa, o es que lo reconocía como un axioma independiente? El lo infirió del "principio de la palanca solicitada o impulsada por poderes en movimiento", del cual afirma que fue "demostrado por el lamentado Sr. Mariotte en la Prop. 13 de la segunda parte de su tratado *Sobre el choque de los cuerpos,* y no hay nadie que no esté de acuerdo con él". Ahora bien, resulta que Mariotte "demostró" esta proposición *experimentalmente*[16]. Cabe con justicia dudar que sus experimentos estableciesen el principio en la forma utilizada por Bernoulli, pero solamente la fantasía podría sugerir que éste concibiera su principio como consecuencia de las leyes de Newton ni de ningún otro de los entonces conocidos principios y leyes de la mecánica. Más bien, el comentar expresamente sobre el postulado dinámico particular de Huygens diciendo que "hay muchas personas a quienes este requisito ha parecido un poco atrevido y que nunca han podido aceptar que sea obvio", está claro que Bernoulli buscaba y encontró en el principio generalizado de la palanca un *método nuevo y más general* para la cinética.

Una vez establecido lo anterior, podemos progresar hasta la aparición más temprana de la idea, a saber, en el primer e incorrecto intento de Jaime Bernoulli para encontrar el centro de oscilación[17] (fig. 88), publicado en 1686 (nótese que esto es

---

15 "Demonstration général du centre de balancement ou d'oscillation, tirée de la nature du levier" (carta del 13 de marzo, 1703), *Mém. Acad. Sci. Paris* 1703, 4.ª ed. (París), 78-84 (1705) = 12.ª ed. (Amsterdam), 96-104 (1707) = *Opera* **2**, 930-936. En el citado cuaderno no publicado de Jaime Bernoulli, la entrada núm. 247 de la pág. 206 es un estudio importante del centro de oscilación, más completo que nada que éste había publicado.

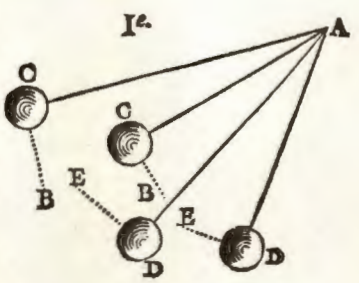
16 *Traité de la percussion ou choc des corps,* París, 1679. Se ha vuelto a imprimir el pasaje en cuestión en págs. 135-136 de las *Lectures de Mécanique* I de Jouguet, París, Gauthier-Villars, 1908.

17 "Narratio controversiae inter Dn. Hugenium et Abbatem Catelanum agitatae de centro oscillationis que loco animadversionis esse poterit in responsionem Dn. Catelani, núm. 27. Ephem. Gallic. anni 1684, insertam", *Acta Erud. Leipzig,* julio, 1686, 356-360 = *Opera* **1**, 277-281. Aquí tomo Bernoulli como fuerzas efectivas los opuestos de las velocidades adquiridas en un tiempo finito en vez de las aceleraciones instantáneas, o bien, como lo dijera L'Hospital en su nota de corrección, "las velocidades principiantes".

nouvelle eſpece de centre, que j'appelle *centre de tenſion*, où l'hypothêſe de M. Huguens ne ſçauroit avoir lieu: j'expliqueray en ſon tems ce que j'entends par-là. Et comme je n'ay encore rien publié de tout cela, je veux vous l'envoyer par parties, pour pouvoir être preſenté à l'Academie, ſi vous trouvez qu'il le merite. Je commence par la premiere.

Principe du Levier tiré ou pouſſé par des puiſſances qui ſont en mouvement.

FIGURE I.



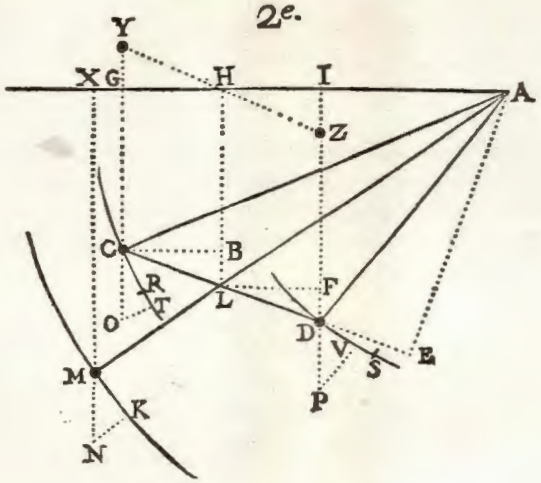
Soient AC, AC, AD, AD, les branches d'un levier mobile autour du point A; ſoient C,C,D,D, des poids ou des puiſſances muës avec des vîteſſes CB,CB,DE,DE, leſquels faſſent impreſſion ſuivant les directions CB, CB, DE, DE, perpendiculaires aux bras de levier AC, AC, AD, AD. Je ſuppoſe que ſi tous les produits des puiſſances C par AC & CB, ſont égaux à tous les produits des puiſſances D (qui agiſſent en ſens contraire) par AD & DE; ou bien ſi tous les produits de C par AC & CB (entant qu'on conçoit toutes les puiſſances agir en même ſens) ſont égaux à rien, le levier doit demeurer en équilibre.

Ce principe a été démontré par feu M. Mariotte dans la Prop. 13. de la ſeconde Partie de ſon Traité de la Percuſſion des corps; & il n'y a perſonne qui en diſconvienne.

SOLUTION.

Fig. 87a. El tratamiento final dado por Jaime Bernoulli al centro de oscilación, según se publicó en las *Mémoires de l'Académie des Sciences*, París, 1703

2e.



SOLUTION.

Soit maintenant A l'axe horizontal du balancement; FIGURE II. AXM un plan vertical droit à l'axe; AM le diametre de la figure qui balance, auquel on ait appliqué dans le même plan l'ordonnée CLD à angle donné ALD, laquelle ait $CL = LD$. Soient de plus C & D deux petites parcelles de la figure, leſquelles décrivent dans leur balancement les arcs CT, DS; ſoit auſſi AM la longueur du Pendule ſimple, qui fait ſes vibrations dans le même tems que la figure qui balance.

De ce que le balancement tant de M, que de C & D, s'acheve par l'hypothêſe en même tems, il s'enſuit que les vîteſſes dont ces poids ſe meuvent à chaque inſtant, ſont proportionnelles à leurs diſtances AM, AC, AD, de l'axe A; & que par conſéquent leur mouvement peut être continué avec ces vîteſſes, ſans que les poids C & D agiſſent en aucune maniére l'un ſur l'autre M: De ſorte qu'il ne faut conſiderer que la ſeule impulſion que la peſanteur ajoûte à chaque moment aux vîteſſes acquiſes. Soit donc

Fig. 87b. Continuación de lo mismo

antes de que le fuera posible haber visto el *Principia* newtoniano). L'Hospital[18] reconocía del mismo[19] que descansaba en un principio "que no es otra cosa que el de la palanca". Además, en este primer intento Bernoulli no cita ninguna prueba teórica ni experimental que apoye su principio.

Así, pues, yo afirmo:

Conjetura 1. *El principio del momento de la cantidad de movimiento, como ley independiente de la mecánica y como generalización a la cinética del principio del equilibrio de momentos en estática, es debido a Jaime Bernoulli* (1686, corregido 1703); *en concepto, si bien no en cuanto a su enunciado correcto, antecede a las leyes de Newton* (1687).

Evidentemente, Bernoulli no enunció el principio ni con claridad ni de forma general; tampoco pretendió que *no* pudiera derivarse a partir de las leyes publicadas más tarde por Newton. En lo que sigue, pues, hemos de seguir explorando la manera en que se usó y se desarrolló el principio hasta llegar a la generalidad según la cual lo conciben los teóricos de mecánica actuales.

5. Comentarios de Daniel Bernoulli y Euler en el año 1744 acerca de la dependencia o independencia de la ley del momento de la cantidad de movimiento

De acuerdo con las notas históricas de Lagrange, tanto Daniel Bernoulli como Euler sugirieron en 1745 una forma del principio en el curso de sus respectivas soluciones del problema de una masa puntual obligada a deslizarse en el interior de un tubo rígido en rotación. El método utilizado por Euler[20] es el mismo que el de Jaime Bernoulli, no obstante, está explicado con claridad y, además, Euler introduce (5) explícitamente en el caso particular del movimiento plano alrededor de un eje fijo ($L = I\,\alpha$); la "demostración" que ofrece no es más que una afirmación de la ley generalizada de la palanca. Por su parte, Daniel Bernoulli[21] obtuvo el mismo resultado[22], con la diferencia de que él intentó demostrarlo a partir de otros principios:

---

18 "Lettre de Mr. le Marquis de l'Hopital à Monsieur Huygens, dans laquelle il prétend démonstrer la régle de cet auteur touchant le centre d'oscillation du pendule composé par sa cause physique, et répondre en même temps à Mr. Bernoulli", *Hist. Ouvrages Sçavans* junio-agosto 1690, 440-449 = *Jac. Bernoulli Opera* **1**, 454-457 = *Oeuvres de Huygens* 9, 403-406.

19 No fue pequeña esta hazaña por parte de L'Hospital. Los primeros tanteos de Bernoulli son siempre extremadamente difíciles de seguir. En cierto lugar dice, "dado que la varilla, en este caso, puede considerarse a modo de palanca..."

20 F. 86, "De motu corporum in superficiebus mobilibus", *Opusc. varii argum.* **1**, 1-386 (1746) = *Opera omnia* (II) **6**, 75-174. Véase §§ 42, 45.

21 "Nouveau problème de mécanique résolu", *Hist. Mém. Acad. Sci. Berlin* 1 (1745), 54-70 (1746). Véase §§ IX-XI.

22 Se sigue de combinar sus Lemas VIII y IX. A continuación, añade los siguientes comentarios tan característicos:

"Este lema ha sido demostrado en varios lugares: Por mi parte, yo lo demostraré en una investigación, *Acerca del movimiento de cuerpos debido a la percusión excéntrica etc.*, §§ 4 y 5, la cual envié a la Academia de Petersburgo hace varios años, en una época cuando, que yo sepa,

junctim dimiſſum, ob inflexilem virgam, nequit pertingere niſi ad L, dum pondus B jam eſt in N, hinc ſequitur, gravitatis vim in pondere A non eſſe exhauſtam; adeoque reſiduum harum virium, ex una parte urgere debere corpus B, ex altera ipſum axem D, eundemque premendo aliquam ſui partem ibidem inſumere & deperdere; ſiquidem virga hocce caſu inſtar vectis conſiderari poſſit; prout extra dubium eſt, quod ſi corpus B infinite tarde moveri, id eſt, firmum & ſtabile eſſe intelligatur, ſicut axis D corpus A partem ſui ponderis, æque in axem D atque in corpus B transferret. Ex hactenus dictis colligere proclive eſt, ſi quis examinare vellet, quantam partem celeritatis ſuæ pondus A in premendo axe D conſumere debeat, eum exinde, imitando Dn. Catelani ratiocinium, veritatem aut falſitatem Hugenianæ Hypotheſeos, inque hac fundatæ Propoſitionis detegere poſſe. Rogantur hac occaſione eruditi, ut examinent, qualem legem communicationis celeritatum obſervent corpora mota, quæ ex una parte innituntur firmo fulcimento, ex altera alii corpori itidem, ſed tardius moto: ſi namque celeritatis exceſſus, qui hinc inde communicandus eſt, in eadem ratione diſtribueretur, in qua diſtribuitur onus aliquod, quod vecti duobus ſuſtento fulcris impoſitum eſt, nimirum in ratione reciproca diſtantiarum mobilis a fulcris, tum imitando ratiocinium Dn. Catelani, deprehenderemus, ſummam altitudinum, ad quas aſcendunt ſeparata penduli pondera, viciſſim nunc minorem eſſe ſumma altitudinum, e quibus antea conjunctim deſcenderant, quod iterum Hugenianam Propoſitionem everteret.

En calculum: Eſto altitudo AL = 1 ped.
Altitudo BN = 4 ped.

Celeritas ponderis A acquiſita in puncto L, ubi deſcendit ſeparatim = 1

Celeritas ponderis B acquiſita in puncto N, quando cadit ſeparatim = 2

Celeritas ponderis A acquiſita in puncto L, quando deſcendit conjunctim = x

Igitur Exceſſus celeritatis ponderis A, qui tam in axem, quam in pondus B redundat = 1 — x

Fig. 88. El primer trabajo publicado de Jaime Bernoulli que intenta hallar el centro de oscilación mediante el empleo de la ley de la palanca (esto es, el enunciado más temprano del principio del momento de la cantidad de movimiento), en el *Acta Eruditorum* de julio, 1686

"...la acción ejercida mutuamente entre sí por el tubo y la bolita no perturba el citado [momento del] momento lineal." Afirma que la "acción" del tubo y de la bolita, cada uno sobre el otro, es normal al tubo, de forma que reemplaza dicha "acción" por un hilito que conecta a ambos. Así, pues, el tubo y la bolita ejercen entre sí fuerzas iguales y opuestas. Bernoulli expresa su idea de lo que había logrado en una carta dirigida a Euler y fechada en febrero de 1744[23]:
"...he derivado y demostrado el principio de conservación del momento del movimiento de rotación a partir de los principios usuales..."

Por tanto, afirmo:

Conjetura 2. *La idea de que el principio del momento del momento lineal se sigue del principio del momento lineal en el sentido de que las acciones mutuas de un sistema de cuerpos no ejercen ningún par resultante se debe a Daniel Bernoulli* (1744).

¿Influyó esta idea en el descubrimiento de las ecuaciones generales para el movimiento de los cuerpos rígidos? Quizás. Pero primero quisiera subrayar un paso en la dirección opuesta:

Conjetura 3. *En un trabajo publicado en 1744, Euler*[24] *fue el primero en*

---

todavía nadie había pensado en esta cuestión. La razón por la que digo esto ciertamente no es para granjearme ningún mérito por ello, sino más bien para que no me tomen por plagiario aquellos que encontrarán las mismas proposiciones en otras obras publicadas desde entonces; y esta justificación se extiende a todas las proposiciones nuevas en mi *Hidrodinámica* y mis diversas memorias sobre mecánica; no obstante, no pretendo que aquellos que han resuelto mis problemas o demostrado mis teoremas me deban lo más mínimo en este respecto, y estimo infinitamente la sabiduría de sus soluciones y sus demostraciones.

"Esta propiedad también la ha observado el Sr. Euler, y me lo señaló en una de sus cartas. Por mi parte, yo no podría demostrar que lo encontrase sin él. Yo había empleado otros términos en mis cálculos, señalando que la suma de las fuerzas vivas resultantes del movimiento circulatorio del sistema, dividida por la velocidad angular del tubo, permanece siempre igual. Eso viene a ser lo mismo, y en justicia al Sr. Euler, he preferido su expresión a la mía."

Se observará que la generalización de Daniel Bernoulli es usualmente falsa; *no* es el principio universal del momento de la cantidad de movimiento.

23 Publicada por P.-H. Fuss, *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIe siècle,* St. Pétersbourg, 1843. Parece ser que se ha perdido la carta de Euler a la que se refiere Bernoulli más arriba.

He buscado entre la restante correspondencia de los Bernoulli con Euler, siguiendo lo publicado por Eneström, *Bibliotheca Math.* (3) **4**, 344-388 (1903); **5**, 249-291 (1904); **6**, 16-89 (1905); **7**, 126-156 (1906-1907). No revela nada más que resulte concluyente en la presente indagación, aunque cerca de una docena de cartas son relevantes. Sería instructivo para los modernos newtonianos el leer la repetida queja de estos grandes geómetras de que se echaban en falta *nuevos principios* con el fin de plantear las ecuaciones del movimiento de varios sistemas mecánicos sencillos. Al parecer, nunca se les ocurrió aplicar las leyes de Newton ni las "ecuaciones newtonianas". El 23 de abril, 1743, escribió Daniel Bernoulli a Euler que deseaba poder determinar el movimiento plano de tres cuerpos unidos entre sí por hilos. "Puede que este problema no sea de lo más fácil [de resolver]. Creo, no obstante, que si conociésemos todas las leyes universales del movimiento, este problema sería bastante fácil y al mismo tiempo daría el impulso para resolver problemas más generales de esta índole." Resultó ser profética esta observación pues, en efecto, poco después llegó Euler a resolver este problema, publicando su solución en § 26 del trabajo que se cita en la nota de pie de página siguiente. La solución de Euler es la muestra más antigua del uso de las ecuaciones "newtonianas" para plantear las ecuaciones diferenciales del movimiento para un sistema dinámico. Para una exposición más detallada de la cuestión que aquí se disputa, véanse §§ 26 y 30 de mi historia de los cuerpos elásticos y flexibles, *L. Euleri Opera Omnia* II 11_2 (1960).

24 E 174 "De motu corporum flexibilium", *Opusc.* [*var. arg*] **3**, 88-165 (1751) = *Opera*

His igitur motus punctorum K, L, M, N, &c. ita afficientur, ut ſit:

$$2K\,ddp = \mathfrak{B}\,dt^2 \qquad 2K\,ddx = B\,dt^2$$
$$2L\,ddq = \mathfrak{C}\,dt^2 - \mathfrak{B}\,dt^2 \qquad 2L\,ddy = C\,dt^2 - B\,dt^2$$
$$2M\,ddr = \mathfrak{D}\,dt^2 - \mathfrak{C}\,dt^2 \qquad 2M\,ddz = D\,dt^2 - C\,dt^2$$
$$2N\,dds = \text{---} - \mathfrak{D}\,dt^2 \qquad 2N\,ddv = \text{---} - D\,dt^2$$
$$\text{\&c.} \qquad \text{\&c.}$$

Tum vero ſingulorum articulorum motus rotatorii a momentis harum virium ita accelerabuntur; ut fiat:

$$2K\,kk\,dd\zeta = (\mathfrak{B}\,b\cos\zeta - B\,b\sin\zeta)\,dt^2$$
$$2L\,ll\,dd\eta = (\mathfrak{C}\,c\cos\eta - C\,c\sin\eta)\,dt^2 + (\mathfrak{B}\,\beta\cos\eta - B\,\beta\sin\eta)\,dt^2$$
$$2M\,mm\,dd\theta = (\mathfrak{D}\,d\cos\theta - D\,d\sin\theta)\,dt^2 + (\mathfrak{C}\,\gamma\cos\theta - C\,\gamma\sin\theta)\,dt^2$$
$$2N\,nn\,dd\iota = \text{- - - - - -} + (\mathfrak{D}\,\delta\cos\iota - D\,\delta\sin\iota)\,dt^2$$
$$\text{\&c.}$$

Ex prioribus ſollicitationibus oriuntur iſtæ binæ æquationes

$$K\,ddp + L\,ddq + M\,ddr + N\,dds + \text{\&c.} = 0$$
$$K\,ddx + L\,ddy + M\,ddz + N\,ddv + \text{\&c.} = 0$$

quæ bis integratæ dabunt:

$$Kp + Lq + Mr + Ns + \text{\&c.} = \mathfrak{F}t + f$$
$$Lx + Ly + Mz + Nv + \text{\&c.} = \mathfrak{G}t + \mathfrak{F}$$

quibus

Fig. 89. Fragmento del Tomo 3 de los *Opusculi* de Euler, mostrando el primer caso donde se asientan los principios del momento lineal y del momento de la cantidad de movimiento como axiomas básicos e independientes de la mecánica

aplicar los principios del momento lineal y del momento angular como leyes mecánicas independientes al plantear las ecuaciones del movimiento de un sistema.

El sistema considerado fue el de n barras ligadas entre sí en un plano (fig. 89).

6. El principio general del momento lineal de Euler (1750) y el descubrimiento de las ecuaciones del movimiento de un cuerpo rigido

Su formulación de un caso particular del principio del momento de la cantidad de movimiento no le llevó a Daniel Bernoulli a descubrir las ecuaciones del movimiento de un cuerpo rígido. En una carta con fecha 4 de diciembre de 1745, dirigida a Euler, describía el problema general de la rotación como "extremadamente difícil, el cual no será resuelto con facilidad por nadie... Uno se preguntaría cómo determinar el eje de rotación mediante un signo de sumatorio, tal que las fuerzas centrífugas se destruyan entre sí." Así como Bernoulli abandonaba el problema, Euler, en cambio, a través de la exploración de casos progresivamente más generales, se iba aproximando a las ecuaciones del movimiento de un cuerpo rígido arbitrario. Por fin logró su objetivo en un estudio escrito en 1750. Este trabajo, titulado *Descubrimiento de un nuevo principio de la mecánica*[25], propone el principio del *momento lineal,* o bien la ecuación "newtoniana" $\boldsymbol{F} = m\ddot{\boldsymbol{x}}$, como el axioma que "incluye a todas las leyes de la mecánica", si se aplica a cada distinto elemento de masa m en cada cuerpo. El resultado final del estudio son las "ecuaciones de movimiento eulerianas" para los cuerpos rígidos (fig. 90). ¿Cómo es esto posible? Euler dice que las fuerzas "incluyen tanto aquellas fuerzas externas que actúen sobre el cuerpo desde afuera, como también las fuerzas internas que ligan entre sí las partes del cuerpo, de tal modo que impidan que éstas cambien sus posiciones relativas. Pero hay que hacer notar que las fuerzas internas se destruyen mutuamente entre sí, de forma que la continuación del movimiento no requiere ninguna fuerza externa, excepto en la medida en que estas fuerzas no se destruyan mutuamente entre sí". A continuación, obtiene las ecuaciones del movimiento al tomar momentos de las ecuaciones del momento lineal para elementos de masa, sin tomar en absoluto cuenta de las fuerzas mutuas que pudiera haber. Así pues, su método es ahora parecido al de Daniel Bernoulli, con la diferencia de que así como ve que las fuerzas mutuas no tienen efecto alguno sobre el movimiento, no hace, sin embargo, ninguna hipótesis particular acerca de su dependencia funcional ni sus direcciones. De hecho, *afirma* que (5) se sigue del principio del momento lineal cuando las fuerzas mutuas son tales que mantengan la rigidez[26]. El teórico actual de mecánica,

---

omnia II 10, 177-232. Fecha de presentación: 5 de noviembre de 1744. Este estudio viene descrito y en parte traducido en págs. 223-299 de mi libro, citado inmediatamente arriba.

[25] E 177, "Découverte d'un noveau principe de mécanique", *Hist. Acad. Sci. Berlin* [6] (1750), 185-217 (1752) = *Opera omnia* II 5, 81-108. Fecha de presentación: 3 de septiembre, 1750. Véanse § 22 y § § 40-58.

[26] Cierto autor moderno ha vuelto a un punto de vista semejante: Aunque en la primera edición (1934) de su libro, dio Houston una derivación de las ecuaciones del movimiento de los cuerpos rígidos sobre la base de partículas que ejercen fuerzas centrales, por el contrario, en la segunda edición, citada en la nota de pie de página núm. 5, abandona las partículas en favor de fuerzas internas continuamente distribuidas por unidad de volumen. Afirma que la anulación de

LV. Dans cet état le corps ſoit ſollicité par des forces quelconques, & pour trouver le changement, qui en ſera cauſé dans le mouvement du corps, on n'aura qu'à avoir égard aux momens des ces forces par rapport aux trois axes OA, OB, OC: ſoit donc le moment qui réſulte de ces forces

pour l'axe OA dans le ſens BC $=$ Pa.
Le moment pour l'axe OB dans le ſens CA $=$ Qa.
Le moment pour l'axe OC dans le ſens CO $=$ Ra.

Maintenant égalant ces moments à ceux qui ont été trouvés cy-deſſus (§. 49.) nous obtiendrons les trois équations ſuivantes.

I. $$\frac{\mathrm{P}a}{2\mathrm{M}} = \frac{ff\,d\lambda}{dt} - \frac{nn\,d\mu}{dt} - \frac{mm\,d\nu}{dt} + \lambda\nu nn - \lambda\mu mn - (\mu\mu - \nu\nu)ll + \mu\nu(hh - gg)$$

II. $$\frac{\mathrm{Q}a}{2\mathrm{M}} = \frac{gg\,d\mu}{dt} - \frac{ll\,d\nu}{dt} - \frac{nn\,d\lambda}{dt} + \lambda\mu ll - \mu\nu ln - (\nu\nu - \lambda\lambda)\,mn + \lambda\nu(ff - hh)$$

III. $$\frac{\mathrm{R}a}{2\mathrm{M}} = \frac{hh\,d\nu}{dt} - \frac{mm\,d\lambda}{dt} - \frac{ll\,d\mu}{dt} + \mu\nu mn - \lambda\nu ll - (\lambda\lambda - \mu\mu)nn + \lambda\mu(gg - ff)$$

d'où on pourra déterminer les changemens infiniment petits $d\lambda$, $d\mu$ & $d\nu$, qui ſeront produits dans l'elément du tems dt.

LVI. Mais, puisque la réſolution de ces équations nous conduiroit à des formules trop longues, poſons, comme nous avons fait auparavant, que le corps tourne à l'inſtant préſent autour de l'axe OA dans le ſens BC avec une viteſſe angulaire $= v$: & qu'après le tems $= dt$, l'axe de rotation change, en ſorte qu'il faſſe alors avec l'axe OA un angle $= d\zeta$, avec l'axe OB un angle $= 90° + d\eta$ & avec l'axe OC un angle $= 90° + a\theta$; & que la viteſſe angulaire devienne alors $= v + dv$: & nous avons vû qu'il eſt $d\zeta^2 = d\eta^2 + d\theta^2$. Cela ſuppoſé, nous aurons les trois équations ſuivantes:

I. $$\frac{\mathrm{P}a}{2\mathrm{M}} = \frac{ff\,dv}{dt} + \frac{nnv\,d\eta}{dt} + \frac{mmv\,d\theta}{dt}.$$

Fig. 90. La derivación dada por Euler de las ecuaciones del movimiento para un cuerpo rígido con respecto a su centro de masa, de las *Mémoires de l'Académie des Sciences*, Berlín, 1750

que tiene constantemente en mente el caso general de un cuerpo deformable, para el cual (5) no se sigue en general del principio del momento lineal, ve aquí el peligro que corría Euler de caerse de la cuerda floja que pisaba; no obstante, como era su costumbre, logró mantener el equilibrio.

El libro de Euler[27] sobre la dinámica de los cuerpos rígidos es tan difuso que oculta la línea de pensamiento en una multitud de casos particulares, aunque parece cierto que se apoya sobre la misma aproximación a la materia que acabamos de describir.

7. Las leyes fundamentales de la mecanica de Euler (1775)

El siguiente en considerar el problema general fue Lagrange[28]. Su "nueva solución" de 1773 comienza diciendo: "Considero al cuerpo propuesto como una asamblea de corpúsculos o masas puntuales unidas entre sí de tal modo que mantengan siempre sus distancias mutuas... Por los principios de la mecánica, tendré, puesto que el sistema se supone libre para moverse alrededor de un punto fijo pero no está sujeto a ninguna otra fuerza externa, digo que tendré, inmediatamente, estas... ecuaciones." A continuación, Lagrange escribe las integrales del momento de la cantidad de movimiento y de la energía cinética para un sistema de masas puntuales libres. Afirma que se siguen de un "conocido principio" acerca de "todo sistema de cuerpos que actúan unos sobre otros de cualquier manera". La supuesta demostración es en realidad tan sólo una reiteración del enunciado. Esta típica falta de precisión, seguida de una nube de cálculos llevó a Euler a replicar[29]: "...Pero cuando intenté con la máxima avidez seguir en detalle sus pensamientos extremadamente profundos, verdaderamente fui incapaz de imponerme el repaso de todos sus cálculos. Ya el primer lema de tal forma me detuvo que, debido a mi ceguera, de ninguna manera podía aspirar a comprobar todos los artificios analíticos que utilizó." En este nuevo trabajo, escrito en 1775, el viejo Euler propuso a los principios del momento lineal y del momento del momento lineal para cada elemento de masa como las *leyes fundamentales, generales e independientes de la mecánica,* aplicables a todo tipo de movimiento y toda clase de cuerpo. En justificación,

---

su momento resultante "puede tomarse como parte de la definición de cuerpo rígido. Esto se seguiría del supuesto de que las fuerzas entre las partes del cuerpo sean centrales, pero dicho supuesto carece de generalidad y parece innecesariamente restrictivo. A menudo se justifica [la anulación del par] por la afirmación de que las fuerzas internas en el interior de un cuerpo rígido están en equilibrio entre sí. Esto puede considerarse como una ley similar a la tercera ley del movimiento de Newton. Describe el hecho observado de que cuerpos aislados no se ponen en rotación."

27 E 289, *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum ex primis nostrae cognitionis principiis stabilita et ad omnes motus, qui in huiusmodi corpora cadere possunt, accomodata,* Rostock y Greifswald, Roese, 1765, 2.ª ed., *ibid,* 1790 = *Opera omnia* II **3** y **4**. Véase capítulo 15.

28 "Nouvelle solution de problème de mouvement de rotation d'un corps de figure quelconque qui n'est animé par aucune force accélératrice", *Nouv. Mém. Acad. Berlin* 1773, 85-120= *Oeuvres* **3**, 579-616.

29 En la introducción a E 479, "Nova methodus motum corporum rigidorum determinandi", *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.* **20** (1775), 208-238 (1776). Presentado el 16 de octubre, 1775. Reimpreso en la 2.ª ed., 1790, del *Tratado sobre cuerpos rígidos.* Se dan las leyes fundamentales en § § 27-29.

sólo dijo: "...por los principios de la mecánica es necesario que..." Por tanto, estos dos principios, de los cuales, las formas integradas son:

$$\boldsymbol{F} = \dot{\boldsymbol{M}} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{L} = \dot{\boldsymbol{H}}, \tag{7}$$

pueden con justicia llamarse las *leyes eulerianas de la mecánica* (fig. 91).

¿Qué es lo que hizo que en su última obra Euler se volviese atrás hacia las ideas de Jaime Bernoulli y abandonase el intento de considerar al principio del momento lineal, suplementado por restricciones sobre las fuerzas mutuas, como suficiente para fundamentar toda la ciencia de la mecánica? La respuesta hay que buscarla, como siempre, en la *práctica,* no la filosofía, de la materia. La creencia de que son suficientes las leyes de Newton o las ecuaciones "newtonianas" en cualquiera de sus formas, sólo la pueden mantener aquellos que limitan su atención a masas puntuales, cuerpos rígidos, y varios otros sistemas particulares. Esto lo sabe cualquier teórico moderno por lo que en seguida percibe las evasiones usadas en los tratamientos típicos, tales como el ya arriba descrito de Joos, en sus intentos de obtener la forma (6), adecuada para los cuerpos deformables. En el siglo dieciocho, la mecánica de fluidos, en cuanto a la teoría desarrollada, se limitaba a los fluidos sin rozamiento, donde de nuevo es suficiente el principio del momento lineal. Pero en *elasticidad,* las leyes de Newton nunca han sido ni pueden ser suficientes: Los problemas más sencillos de elasticidad descansan esencialmente sobre el equilibrio de momentos, y si queremos concebir el cuerpo como compuesto por moléculas que ejercen fuerzas mutuas, dichas fuerzas *no pueden* excluirse del modelo. En la teoría de la elasticidad, son esenciales las fuerzas descritas por Joos como "no proporcionales al volumen del elemento, sino al área de su superficie", por lo que éste hubiera hecho mejor en aducirlas como ejemplo en vez de echar mano de la ley de Biot y Savart a la hora de sembrar dudas acerca de la generalidad de las fuerzas centrales binarias. Cualquiera que haya estudiado las teorías clásicas y modernas del estado sólido conoce la plaga de dificultades que aparecen, desde el principio hasta el fin, en una aproximación molecular a la elasticidad. *Toda persona* que estudiara en el siglo dieciocho los problemas de elasticidad invocaba el principio de momentos. Por tanto, para acabar, si hemos de hallar el origen del principio independiente del momento de la cantidad de movimiento, hemos de rastrear la historia de las teorías de los materiales elásticos.

En otra parte he hecho precisamente esto[30]. El propio Euler durante toda su vida estudió varios casos de cuerda flexible o elástica, progresando lentamente hacia una mayor generalidad. Continuamente se esforzó en formular una *mecánica única* que abarcase toda clase de sistemas. Logró demostrar que, para un cable perfectamente flexible, tanto el equilibrio de fuerzas como el equilibrio de momentos bastaba para obtener las ecuaciones del equilibrio; para tal sistema, los dos principios son equivalentes. Sin embargo, para un cable elástico, desde el comienzo se había usado el equilibrio de momentos, y ningún esfuerzo ni hipótesis jamás le permitió eliminar a pares en favor de fuerzas. Por otra parte, la aplicación del principio de D'Alembert-Euler de las aceleraciones invertidas a la ecuación del equilibrio para una cuerda elástica, obtenida mediante el balance de momentos, no lleva a las ecua-

---

30 *L. Euleri opera omnia* (II) 11$_2$, 1960. También, "Outline of the history of flexible or elastic bodies to 1788", *J. Acoust. Soc. Amer.* 32, 1647-1656 (1960).

ea nullum naſcitur momentum pro hoc axe ; pro axe autem I B naſcetur momentum $= z\,d\,M\,(\frac{d\,d\,x}{d\,t^2})$ et pro axe I C momentum $= y\,d\,M\,(\frac{d\,d\,x}{d\,t^2})$. Simili modo ex vi acceleratrice ſecundum directionem I B, quae eſt $d\,M\,(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2})$ naſcitur momentum pro axe I A $= z\,d\,M\,(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2})$, at pro axe I C momentum $= x\,d\,M\,(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2})$. Denique ex vi acceleratrice ſecundum I C, quae eſt $d\,M\,(\frac{d\,d\,z}{d\,t^2})$ naſcitur momentum pro axe I A $= y\,d\,M\,(\frac{d\,d\,z}{d\,t^2})$ et pro axe I B momentum $= x\,d\,M\,(\frac{d\,d\,z}{d\,t^2})$. Hinc igitur pro quolibet axe habemus bina momenta elementaria, quae in partes contrarias vergunt ; vnde pro axe I A ſumma omnium momentorum elementarium erit

$$+\int z\,d\,M\,(\tfrac{d\,d\,y}{d\,t^2}) - \int y\,d\,M\,(\tfrac{d\,d\,z}{d\,t^2}) = i\,S.$$

Eodem modo pro axe I B obtinebimus hanc aequationem:

$$\int x\,d\,M\,(\tfrac{d\,d\,z}{d\,t^2}) - \int z\,d\,M\,(\tfrac{d\,d\,x}{d\,t^2}) = i\,T.$$

Tertia vero aequatio erit pro axe I C

$$\int y\,d\,M\,(\tfrac{d\,d\,x}{d\,t^2}) - \int z\,d\,M\,(\tfrac{d\,d\,y}{d\,t^2}) = i\,U.$$

§. 29. Hac igitur ratione ſex nacti ſumus aequationes, quas hic coniunctim conſpectui exponamus

I. $\int d\,M\,(\frac{d\,d\,x}{d\,t^2}) = i\,P$ IV. $\int z\,d\,M\,(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}) - \int y\,d\,M\,(\frac{d\,d\,z}{d\,t^2}) = i\,S$

II. $\int d\,M\,(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}) = i\,Q$ V. $\int x\,d\,M\,(\frac{d\,d\,z}{d\,t^2}) - \int z\,d\,M\,(\frac{d\,d\,x}{d\,t^2}) = i\,T$

III. $\int d\,M\,(\frac{d\,d\,z}{d\,t^2}) = i\,R$ VI. $\int y\,d\,M\,(\frac{d\,d\,x}{d\,t^2}) - \int z\,d\,M\,(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}) = i\,U.$

In

Fig. 91. El enunciado general y final dado por Euler a los principios del momento lineal y del momento de la cantidad de movimiento, tomado de los *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* para el año 1775

ciones del movimiento. Entonces, *¿cuáles* son las ecuaciones del movimiento para una elástica? En 1771, después de la publicación de su libro sobre los cuerpos rígidos pero antes de su enunciado de las leyes generales del movimiento (7), Euler por fin se dio cuenta de que todos los resultados sobre la elástica obtenidos hasta aquel momento provenían de las propiedades particulares de la ecuación constitutiva en vez de los principios generales de la mecánica. Volviendo en efecto al programa de Jaime Bernoulli[31], se lanzó a la búsqueda de las ecuaciones del equilibrio y del movimiento para un *continuo plano arbitrario,* independientemente de su constitución material. Para ello, tanto el balance de momentos como el de fuerzas son necesarios; ninguno basta por sí sólo. A continuación, la aplicación del principio de D'Alembert-Euler a las ecuaciones de equilibrio de fuerzas da lugar a las ecuaciones del movimiento deseadas, a saber[32], las ecuaciones (23) citadas arriba en la pág. 220. Corresponden estas ecuaciones a las (6) pero son más generales al ser cinéticas, y más particulares en que el continuo se supone una curva plana. Constituyen el primer ejemplo de *leyes generales de mecánica, independientes de la naturaleza de las fuerzas mutuas y de los materiales.*

Por tanto, bien pudiera haber sido la necesidad de aplicar (5) como principio independiente de las leyes de Newton a un problema para el cual éstas jamás se han mostrado útiles, ni siquiera relevantes, lo que le obligó a Euler a abandonar toda referencia a fuerzas mutuas al plantear sus leyes generales de la mecánica (7). Por lo mismo, afirmo:

Conjetura 4. *El principio general del momento de la cantidad de movimiento, como independiente del principio del momento lineal y aplicable a toda parte de todo cuerpo, fue propuesto primeramente por Euler en 1775. Fueron sus estudios de las cuerdas elásticas, culminando en su teoría general del continuo lineal plano de 1771, los que le llevaron a dicha formulación.*

Por otra parte, la maduración del entendimiento de la naturaleza e importancia del momento de la cantidad de movimiento es inseparable del desarrollo del concepto de esfuerzo en un medio continuo[33], el cual se va revelando en las investigaciones de Cauchy y otros hasta la fecha presente. Sin embargo aquí no insistiré más en esta cuestión, puesto que, como han demostrado los trabajos de J. L. Ericksen, la misma definición de momento de la cantidad de movimiento precisa de una nueva generalización, por lo que se encuentra actualmente sometida a una crítica severa.

8. La transicion a los newtonianos (1833 hasta la fecha)

Nuestra exploración de las fuentes todavía no ha proporcionado la afirmación A,

---

31 "Véritable hypothèse de la résistance des solides, avec la démonstration de la courbure des corps qui font ressort... Lettre du 12 mars 1705", *Mém. Acad. Sci. Paris,* 1705, 4.ª ed., París, 176-186 (1706) = 12.ª ed., Amsterdam, 230-244 (1707) = *Opera* 2, 976-989. Se analiza este trabajo en págs. 105-109 del libro mío citado en la precedente nota de pie de página.

32 E 410, "Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flexibilium quam elasticorum", *Novi. Comm. Acad. Sci. Petrop.* 15 (1770), 381-413 (1771) = *Opera omnia* II, 11_1, 37-61. Fecha de presentación: 14 de enero de 1771.

33 Respecto a este desarrollo, véase el ensayo precedente de este tomo.

si bien hemos encontrado jalones hacia la misma en las obras de Daniel Bernoulli (1744), Euler (1752), y Lagrange (1788). La aparición más temprana que he podido encontrar se da en un libro de texto de Poisson[34]:

Conjetura 5. *El enunciado y la demostración de la proposición de que un sistema de fuerzas centrales, equilibradas dos a dos, no ejerce ningún par resultante, se debe a Poisson* (1833).

La demostración de Poisson es la misma que se encuentra en los textos modernos; menciona "la ley general de que la acción es siempre igual a la reacción", la cual "se satisface siempre en la naturaleza", y dice "siempre hay que notar" que $(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j) \times \boldsymbol{F}_{jk} = \mathbf{0}$. (Ver figs. 92, 93).

Con Poisson, sin embargo, estamos todavía bastante lejos de los newtonianos de hoy en día. Las afirmaciones arriba citadas ocurren en la página 447 del volumen 2, de modo que no parece que Poisson las haya considerado fundamentales para toda la mecánica en bloque. Por ejemplo, la teoría de los cuerpos rígidos la da mucho antes[35]. Aparte del enunciado citado de lo que a menudo se llama la "tercera ley de Newton", esto es, $\boldsymbol{F}_{jk} = -\boldsymbol{F}_{kj}$ y $(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_j) \times \boldsymbol{F}_{jk} = \mathbf{0}$, no parece haber en todo el libro ninguna otra referencia a las leyes de Newton, ni en la forma enunciada por el propio Newton, ni tampoco tal y como se formulan en los textos de física actuales. Ni siquiera he visto nombrado al pensador inglés.

Después de todo lo anterior, podemos preguntarnos, ¿quién tuvo por vez primera la idea de que las ecuaciones "newtonianas" bastaban por sí solas como base de la mecánica? Ciertamente ninguno de los creadores de la mecánica salvo, acaso, el propio Newton[36]. Tal idea contradice[37] el contenido de casi cualquier página de

---

34 *Traité de Mécanique,* 2.ª ed., París, Bachelier, 1833. Véanse § § 552-554.

Evidentemente, resulta difícil estar seguros de que la aparición más antigua que encontremos de un razonamiento tan elemental marque de hecho la primera observación del mismo. En este caso particular, podemos ver, al menos, que el propio Poisson no tenía el problema del todo meditado en 1811, cuando salió la primera edición de su *Traité de Mécanique.* En § 456 de dicha edición, en relación con el par resultante escribió: "Así pues, al formarlo, no se tomará en cuenta la atracción mutua de los cuerpos del sistema, con tal de suponerse, como de hecho sucede en la naturaleza, que la acción es igual a la reacción entre dos puntos materiales de masa igual", y concluye que esto es "fácil de comprobar mediante sustitución". En el pasaje citado de la segunda edición, lleva a cabo la comprobación, y, al parecer, ve de este modo que es esencial la condición de fuerzas *centrales,* mientras que es innecesaria la de masas iguales. No hay contrapartida en la primera edición para § 552 de la segunda, donde se enuncia explícitamente la "ley general de la acción y la reacción".

35 Véanse § 382 de la primera edición, § 412 de la segunda. No está claro siquiera en estos pasajes que haya que dejar de tomar en cuenta las fuerzas mutuas entre las partes de un cuerpo rígido; jamás las menciona Poisson. El que, en efecto, hemos de omitirlas puede inferirse de su adopción del principio de D'Alembert como axioma básico de la dinámica (§ 332 de la edición primera, § 350 de la segunda): Las fuerzas efectivas debidas a las ligaduras forman un sistema en equilibrio estático.

36 No veo razón alguna para pensar que Newton jamás tuviera tal idea; lo cierto es que no se confirma con un examen del *Principia.* Véanse los resúmenes míos del *Principia* en § 1 del ensayo segundo de este tomo y en § § 1-2 del tercero. Parece ser que el mito newtoniano se originó en un grupo de discípulos británicos, la mayoría de los cuales poseían insuficientes conocimientos matemáticos como para seguir ninguna demostración del *Principia.* Ello puede que explique el hecho, a primera vista asombroso, de que no se encontrara ningún resultado importante en mecánica teórica en la Inglaterra de entre 1740 y 1815. Desde el primer momento ha habido una tendencia a glorificar a Newton como santo literario en vez de seguirle como líder de la ciencia.

37 Recuérdense las definiciones de términos de la nota de pie de página núm. 5. Claro que

hautes mers sont les plus considérables dans les *syzygies*, et les moindres dans les *quadratures*.

§ II. *Principes de la conservation du mouvement du centre de gravité, et de la conservation des aires.*

552. Puisque le mouvement du centre de gravité d'un système entièrement libre est le même que si les masses de tous les mobiles y étaient réunies, et que leurs forces motrices y fussent transportées parallèlement à leurs directions, il s'ensuit que les forces données dont les composantes parallèles à chaque coordonnée seront égales et contraires, n'entreront pas dans les équations différentielles de ce mouvement. Or, ce cas est celui des forces motrices provenant des actions mutuelles des points du système, en vertu de la loi générale de l'*action égale à la réaction*, qui s'observe toujours dans la nature, ainsi qu'on va l'expliquer.

Si un point matériel situé en M agit sur un autre point situé en M′, et lui imprime ou tend à lui imprimer, dans un instant, une quantité de mouvement infiniment petite, que je représenterai par μ, on observe toujours :

1°. Que cette action est dirigée suivant la droite menée du point M′ vers le point M, ou suivant son prolongement au-delà de M′;

2°. Qu'en même temps le point situé en M′ réagit sur le point situé en M, suivant la droite qui va de M vers M′, ou suivant son prolongement au-delà de M.

Fig. 92. Pág. 447 de la segunda edición del *Traité de Mécanique* de Poisson, 1833, mostrando lo que parece ser la primera aparición de la idea de que el principio de la acción y la reacción se refiere a fuerzas centrales

vers m pour le point m'. En appelant ρ la distance de ces deux points, les cosinus des angles que fait la droite mm', avec des parallèles aux axes des x, y, z, menées par le point m, seront

$$\frac{x'-x}{\rho}, \quad \frac{y'-y}{\rho}, \quad \frac{z'-z}{\rho};$$

relativement à la force F, on aura donc

$$mX=\frac{(x'-x)F}{\rho}, \quad mY=\frac{(y'-y)F}{\rho}, \quad mZ=\frac{(z'-z)F}{\rho},$$

pour les composantes de la force motrice du point m; et l'on trouvera de même

$$m'X'=\frac{(x-x')F}{\rho}, \quad m'Y'=\frac{(y-y')F}{\rho}, \quad m'Z'=\frac{(z-z')F}{\rho},$$

pour les composantes de la force motrice de m', provenant de cette force F. Or, d'après ces valeurs, nous aurons

$$m(xY - yX) + m'(x'Y' - y'X') = 0,$$
$$m(zX - xZ) + m'(z'X' - x'Z') = 0,$$
$$m(yZ - zY) + m'(y'Z' - z'Y') = 0;$$

par conséquent, les termes provenant de l'action mutuelle des points du système, se détruisent deux à deux dans les seconds membres des équations (9) du n° 539.

Si donc il n'y a pas d'autres forces motrices qui agissent sur les points m, m', m'', etc., le mouvement de rotation du système autour de l'origine des coordonnées, sera uniquement dû aux vitesses

Fig. 93. Pág. 453 de la segunda edición del *Traité de Mécanique* de Poisson, 1833, mostrando lo que, al parecer, es la primera demostración de que el principio del momento de la cantidad de movimiento se sigue del principio del momento lineal, en el caso de fuerzas centrales equilibradas dos a dos

Fig. 94. Siméon-Denis Poisson (1781-1840), según una litografía de François Delpech, basada en un dibujo de Nicolas Maurin, anterior a 1825

las obras de los Bernoulli, Euler, D'Alembert, o Lagrange, pero encaja bien con los puntos de vista aceptados un siglo más tarde. En 1867, Kelvin y Tait[38] afirmaron la supremacía de las leyes de Newton en términos que pronto harían eco en la obra de Mach; no obstante, después de unos pocos lances preliminares, de hecho adoptaron como axioma suyo el principio de los trabajos virtuales de Lagrange. Kirchhoff[39] planteó como "el caso más general a considerar en la mecánica de puntos materiales" las ecuaciones "newtonianas" restringidas a una clase particular de fuerzas, a saber, fuerzas a las que se asignan funciones de las posiciones, las velocidades, y el tiempo, ampliadas por las fuerzas que proceden de las ligaduras holónomas. Entre 1833 y 1867 había ocurrido, pues, un cambio fundamental en mecánica, no en la materia en sí, sino en la *manera de enseñarla.* La descripción de este cambio exigiría un nuevo ensayo, acaso aburrido, pero no obstante, necesario, pues, en contraste con la mayoría de los estudios históricos, nos mostraría cómo muere una rama del saber. En todos los campos menos la ciencia, los pensadores modernos tienden a dudar del mito del "progreso" tan extendido en tiempos de sus abuelos. Acaso también la ciencia merece volver sus dudas hacia sí.

Agradezco al profesor Van der Waerden por sus valiosas reflexiones sobre esta materia.

APENDICE: PUNTOS DE VISTA RECIENTES ACERCA DE LOS PRINCIPIOS DE LA MECANICA

Dado que es poco probable que historiadores o físicos hayan tenido mucho contacto con las investigaciones modernas en mecánica, incluyo aquí un bosquejo de una nueva aproximación hacia los fines que parece que se persiguen en la mayor parte de los casos al invocar las leyes de Newton o las ecuaciones "newtonianas", mencionando sus orígenes históricos.

A. Fuerzas y pares son objetos no definidos, juntamente con la masa, la posición y el tiempo. Esta visión parece estar en consonancia con aquella de Newton, Euler, y la actual enseñanza de física, si bien opuesta a aquella mantenida por D'Alembert, Lagrange y Mach. Sin embargo, en contraste con los trabajos anteriores, hoy en día se acepta la necesidad de prescribir *axiomas matemáticos* a satisfacer por las fuerzas y los pares[40], de la misma manera que los números reales son objetos no definidos y no se consideran suficientemente descritas hasta que hayamos enunciado los axiomas que satisfacen.

---

casi la totalidad del esfuerzo fructífero de la filosofía matemática del siglo dieciocho se dirigía hacia la temática más amplia de la "mecánica newtoniana" en distinción con, digamos, la mecánica peripatética o la cartesiana, y en la extensión de algunas de las teorías mecánicas de Galileo y Huygens.

38 § § 242-264 y § 293 de su *Tratado de Filosofía Natural,* Oxford, Clarendon Press, 1867.

39 Ecuación (17) de Conferencia II de *Vorlesungen über mathematische Physik: Mechanik,* Leipzig, Teybner, 1876.

40 W. Noll, "The foundations of classical mechanics in the light of recent advances in continuum mechanics", *The Axiomatic Method, with Special Reference to Geometry and Physics,* Amsterdam, North Holland, 1959, 266-281. Véase § 5 del séptimo ensayo de este tomo, más abajo.

B. Las leyes de Euler (7), que relacionan la *carga* $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{L})$ a la *reacción* $(\dot{\boldsymbol{M}}, \dot{\boldsymbol{H}})$ en sistemas de referencia inerciales, expresan los axiomas fundamentales de la mecánica.

C. Todas las fuerzas y todos los pares que se originan en las acciones mutuas de cuerpos son *indiferentes* en el sentido de que son invariantes bajo cambio de observador[41].

D. Utilizando tan sólo los axiomas *A* y la ecuación euleriana $(7)_1$, puede demostrarse un principio de acción-reacción de la forma siguiente: La suma de las fuerzas mutuas ejercidas por dos partes disyuntas cualesquiera de un cuerpo libre de cargas singulares es cero.

E. Si se suponen discretas las masas, y no se aplican pares, puede demostrarse la fuerte restricción llamada la "tercera ley de Newton" por algunos autores (otros rechazan esta denominación)[42], como consecuencia del resultado enunciado en el apartado *D* y la ecuación euleriana $(7)_2$. Esto es: las fuerzas mutuas entre masas puntuales son centrales. Así, si nos contentamos en limitar la mecánica a sistemas de masas puntuales sometidas a fuerzas binarias que obedecen el principio del momento de la cantidad de movimiento, esta restrictiva "tercera ley de Newton" es *equivalente* al principio del momento de la cantidad de movimiento[43]. Aprovecho la ocasión para comentar aquí que aquellas personas que consideren que la ecuación $(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \times \boldsymbol{F}_{ij} = \boldsymbol{0}$ expresa el contenido de la tercera ley de Newton o que por otra parte constituye una ley mecánica, no tienen, por tanto, ninguna base para considerarla más o menos fundamental que el principio del momento de la cantidad de movimiento, en tanto que limiten su atención a sistemas de masas puntuales no susceptibles al efecto de pares.

F. En el enunciado que hiciera el propio Newton de su tercera ley, no da ninguna explicación de qué tipos de "cuerpos" tenía en mente ni lo que quería decir por las "acciones" que éstos ejerciesen entre sí. Tampoco afirmó que todas las fuerzas en el universo fueran binarias ni impuso condición alguna sobre cualquier otro tipo de "acciones". Acciones de un tipo diferente no solamente ocurren en la mecánica de medios continuos. Ericksen me ha señalado una obra de Cauchy[44] en la cual se considera, aparentemente, un sistema de masas puntuales poseyendo una energía potencial que depende de las posiciones de todas las masas, y no necesariamente de la suma de potenciales de pares de partículas. Con la ayuda del teorema de Cauchy sobre las funciones isótropas, Ericksen demuestra que se sigue de la exigencia de indiferencia material, enunciada arriba en el apartado C, que el par

---

41 Véase § 19 A de *The Non-linear Field Theories of Mechanics* para una exposición de este *principio de indiferencia material* y un bosquejo de su historia, la cual arranca de ciertos estudios de Poisson hechos en el año 1829.

42 Véanse notas de pie de página núms. 5 y 26.

43 En la obra citada en la nota de pie de página núm. 40, Noll da demostraciones de esta afirmación así como de aquella bajo D; también aparecen en forma esquemática en § 196 A de *The Classical Field Theories.*

44 "Mémoire sur les systèmes isotropes de points matériels", *Mém. Acad. Sci. Paris* **22**, 615-654 (1850) = *Oeuvres* (1) **2**, 351-386.

resultante de tal sistema de fuerzas ha de ser cero. Por tanto, para fuerzas mutuas binarias, el principio de indiferencia material es *equivalente* a la restricción a fuerzas centrales, y se obtiene el principio del momento de la cantidad de movimiento. Para fuerzas mutuas más generales, las cuales no se conciben en (1) ni en las afirmaciones acerca de la tercera ley de Newton o de la acción y la reacción que aparecen en todos los textos de física que yo he podido ver, *el principio del momento de la cantidad de movimiento sigue siendo una consecuencia del principio de indiferencia material.* Teoremas semejantes se satisfacen en la teoría clásica de la deformación elástica finita[45] y en la teoría de los fluidos linealmente viscosos.

G. Las observaciones precedentes demuestran que todas las formulaciones de la mecánica expuestas aquí son equivalentes, en la medida de su aplicabilidad. El principio del momento del momento lineal y el de la indiferencia material son infinitamente más amplios que cualquier afirmación acerca de fuerzas mutuàs entre dos o más masas puntuales.

H. En las investigaciones modernas en mecánica son necesarios todos los axiomas citados en los apartados *A, B* y *C;* para la mecánica pura son también suficientes. Esta afirmación es válida incluso cuando haya que generalizar la definición del momento de la cantidad de movimiento, como sucede en el caso de la teoría de los gases poliatómicos de Grad[46] o la teoría de los cristales líquidos de Ericksen[47].

A mi parecer, actualmente resulta práctica una aproximación a la mecánica esquematizada por los siguientes pasos:

1. Los axiomas satisfechos por fuerzas y pares tienen su motivación, y hasta cierto punto son verificados por experimentos, en la estática. Estos axiomas se adoptan sin modificaciones en la cinética.

2. Los principios:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{L} = \boldsymbol{0} \tag{8}$$

considerados como necesarios y suficientes para el equilibrio, derivan su motivación, y hasta cierto punto son verificados por experimentos, en la estática. Siguiendo el camino abierto por Jaime Bernoulli, suponemos que el movimiento tiene el efecto de dar lugar a fuerzas aparentes que son iguales, por unidad de masa, a las aceleraciones cambiadas de signo en aquellos sistemas de referencia donde (8) son las ecuaciones estáticas. La aplicación de este principio de D'Alembert-Euler lleva a (7) como las ecuaciones generales de la dinámica, la cual incluye tanto a la estática como a la cinética.

---

45 W. Noll, "On the continuity of the solid and fluid states", *J. Rational Mech. Anal.* 44, 3-81 (1955). Véase § 16, Corolario a Teorema I.

46 H. Grad, "Statistical mechanics, thermodynamics, and fluid dynamics of systems with an arbitrary number of integrals", *Comm. Pure Appl. Math.* N. Y. U. 5, 455-494 (1952). Véase § 4.

47 J. L. Ericksen, "Anisotropic fluids", *Arch. Rational Mech. Anal.* 4, 231-237 (1959), y publicaciones posteriores.

3. La idea general y verdadera expresada de modo imperfecto en la tercera ley de Newton y en la literatura que trata de la misma, viene correctamente enunciada en el *principio de indiferencia material respecto al sistema de referencia:* Las propiedades de los materiales ("acciones" de unos cuerpos sobre otros) son las mismas para todos los observadores.

NOTA BIBLIOGRAFICA

Esta conferencia se leyó en 1963 en Columbia University, y en la Universidad de California, Los Angeles, así como en la Universidad de Washington, Seattle, en el año 1964. Se publicó en las *Mélanges Alexandre Koyré,* en la colección "Histoire de la Pénsée", París, Hermann, volumen 1, págs. 149-158, 1964. Agradezco a los editores y a la casa editorial que publicó dicho volumen su amable permiso para reimprimirla.

En 1963 se leyó una traducción parcial de la conferencia al alemán, con un apéndice distinto y tomando en cuenta esfuerzos debidos a pares y el momento angular de *spin,* en las Universidades de Freiburg i. Br., Berlin-Charlottenburg, y Aachen, la cual se publicó con el título "Die Entwicklung des Drallsatzes" en *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik,* volumen 44, págs. 195-205 (1964).

VI. PRIMERAS TEORIAS CINETICAS DE LOS GASES

1. EL SIGLO DIECIOCHO

Son muy antiguas las ideas de que la materia está compuesta por moléculas en estado de agitación violenta y de que el calor es una manifestación de este movimiento. La primera medida concreta del calor del movimiento interno fue propuesta por Hermann en 1716[1]. Afirmaba éste que las moléculas de un fluido, las cuales pueden ser infinitamente variadas, "pueden concebirse como lanzadas por aquí y por allá en una agitación variada e irregular". Su "teorema" fundamental dice así: "El calor en cuerpos de análoga composición está en la razón compuesta de la densidad del cuerpo caliente y el cuadrado de la agitación de sus partículas." La demostración que aduce no es más que una reafirmación del enunciado, salvo que aclara lo que quiere decir (fig. 95). En primer lugar, la "velocidad" es la *velocidad escalar media* de las moléculas. En segundo lugar, el "calor" es lo que ahora llamaríamos presión, la cual es ciertamente una manifestación del calor. La afirmación de Hermann, implica, pues,

$$p = K\varrho\bar{v}^2, \tag{1}$$

donde p es la presión, v la velocidad molecular, la barra indica un valor medio,

---

[1] § 659 de *Phoronomia*, de J, Hermann, Amsterdam, 1716.

No considero *teoría* cinética la simple afirmación de que el calor es un modo de movimiento de las partes de un cuerpo, o que la presión es el resultado de tal movimiento, ambas afirmaciones pudiendo trazar sus orígenes entre los antiguos. Las especulaciones moleculares del período barroco, que atribuyen la presión a las fuerzas ejercidas por unas partículas sobre otras o a los efectos de la vibración molecular están, si cabe, aún más lejos de la verdad. En cuanto a Hooke, a duras penas podemos esperar de un hombre que fue incapaz de demostrar correctamente la isocronía de las vibraciones de una masa fijada a un muelle simple que estuviera en una posición como para iniciar la teoría cinética de la materia. Los comentarios de Hooke sobre ésta son tan vagos como los de Demócrito, sin apunte alguno hacia un cálculo de transferencia de momento ni de energía cinética. Hay, sin embargo, quienes son incapaces de distinguir entre un voto por la única iglesia verdadera y la demostración de un teorema matemático, y éstos incluyen no sólo profesionales de la historia de la ciencia, sino también físicos practicantes. Véanse las relaciones totalmente ingenuas de P. G. Tait, "Hooke's anticipation of the kinetic theory, and of synchronism", *Proc. R. Soc. Edinb.* 1885 = [en forma expansionada] *Sci. Papers* **2**, 122-123, y de E. N. Da C. Andrade, "Robert Hooke", *Proc. Royal Soc. London* A **201**, 439-473 (1950), especialmente págs. 460-461. No sorprende que ni Tait ni Andrade se den cuenta de la falacia —a pesar de que tanto Huygens como Leibniz lo habían reconocido como tal— que hay en la "demostración" que ofrece Hooke de la isocronía; Andrade llega incluso a calificarla de "descubrimiento capital".

Otros autores tempranos a veces mencionados en conexión con una explicación molecular de la ley de Towneley-Power-Boyle son Newton, Jaime Bernoulli, y Juan Bernoulli. Sus diversos puntos de vista se ven reflejados en § § 339-348 del libro de Hermann.

Hasta Newton falló aquí. Pasando por alto lo nada convincente de su tratamiento de un gas compuesto de "partículas huyendo unas de otras", además pretende haber demostrado que si se mantiene la ley de Towneley-Power-Boyle, las fuerzas intermoleculares han de ser inversamente proporcionales a la distancia intermolecular. Ver los *Principia*, Lib. II, Prop. XXIII, Theor. XVII (XVIII en la segunda y tercera ediciones).

tionalis quantitati EM. EB. Gg : EG. FG = 2EM. EB. GO : GN², erit momentum ſolicitationis acceleratricis, ut 2EM. EB. GO. — *d*GO : GN² = 2EM. BE. GN. *d*GN : GN³ = 2EM. EB. *d*GN : GN proportionale momento celeritatis acquiſitæ, ſeu V*d*V, vocando hanc celeritatem V, & *d*V ejus elementum, & — *d*GO ſignificat elementum decreſcens lineæ GO, alterum vero *d*GN elementum ordinatæ GN. hinc EM. log. (GN² : BQ²) eſt, ut quadratum celeritatis puncti progredientis G.

CAPUT XXIV.

De Motu inteſtino fluidorum.

658. HOc nomine non intelligitur hoc loco internus moleculârum motus fluidi cujuscunque in ſuo ſtatu naturali conſiſtentis, ſed is particularum motus, qui in fluidis à cauſis externis & accidentalibus excitari ſolet, quò calor præſertim eſt referendus, qui dubio procul ex concitatiore particularum motu in corpore calido à cauſis externis producitur. Utut verò ejusmodi motus inteſtinus admodum perturbatus ſit, nihilo tamen minus regula phyſicè ſatis accurata pro ejus menſura media tradi poteſt.

PROPOSITIO LXXXV. THEOREMA.

659. *Calor, cæteris paribus, eſt in compoſitâ ratione ex denſitate corporis calidi, & duplicatâ ratione agitationis particularum ejusdem.*

Agitatio particularum eſt celeritas media inter celeritates particulares, quibus calidi corporis particulæ agitantur. Vocetur hæc celeritas media V, & corporis denſitas D. Jam, quia calor conſiſtit in concitatiore particularum motu, calor erit, ut impreſſiones particularum corporis calidi in quopiam objecto corpore calorem excipiente, ſed hæ impreſſiones ſunt in compoſita ratione ex duplicata celeritatum & ſimpla denſitatum, ſeu, ut D. V². Ergo etiam calor eſt ut D. V². Quod erat demonſtrandum.

Dictum in propoſitione *cæteris paribus*, id eſt, in corporibus ſimilis texturæ.

SCHO-

Fig. 95. La teoría cinética de Jacobo Hermann, de su *Phoronomia*, 1716

ϱ es la densidad y K es una constante que sólo depende del tipo particular de cuerpo.

El primero en formular una verdadera teoría cinética fue Euler (1729)[2]. No habiendo cumplido éste todavía los veintiún años, escribió un artículo en el que, tomando como fuente la revisión que hiciera Juan Bernoulli de la cosmología de vórtices de Descartes, concibió al aire como compuesto de moléculas esféricas en rotación, densamente espaciadas. Sobre un alma esférica de éter se encaja una capa de la "verdadera sustancia del aire", la cual está recubierta, a su vez, por una capa de agua. La presión del aire es una manifestación de la fuerza centrífuga que acompaña al movimiento de rotación. La proporción del agua a la verdadera sustancia del aire es una medida de la humedad. La densidad aparente del aire es la densidad media de estas moléculas compuestas. Suponiendo que a cualquier temperatura dada la velocidad lineal v del movimiento en vórtice es la misma para todas las partículas de aire y agua, derivó Euler una *ecuación de estado* relacionando p, ϱ, v y la humedad, modulada por varias constantes moleculares (fig. 96). Para aire seco que no sea demasiado denso, obtuvo como aproximación la relación:

$$p \approx \tfrac{1}{3}\varrho v^2. \tag{2}$$

Concluyó, pues, que a temperatura constante, $p \propto \varrho$, lo cual es la llamada ley de Towneley-Power-Boyle. Sin embargo, (2) es sólo una aproximación a su fórmula general, que toma en cuenta una densidad última correspondiendo a un límite impasable en la compresión del aire. Euler aprovechó los datos de Boyle (1662) para inferir una relación entre las diversas constantes moleculares hipotéticas y discutir las desviaciones de la simple proporcionalidad deducida por Towneley y Power. También comentó sobre los experimentos que harían falta para determinar las demás constantes que aparecen en su fórmula, haciendo varias propuestas plausibles acerca de cuáles serían sus valores.

Si basta la fórmula aproximada (2), fácilmente puede calcularse a v para cada valor de p y ϱ. Para condiciones ambientales medias, Euler obtuvo $v = 477$ m/sg. Este valor es muy grande, pero como comentaba el propio Euler, existen en la naturaleza velocidades mucho mayores, tales como la de la luz. Finalmente, se fijó en que (2) implicaba:

$$v = \sqrt{3}\sqrt{\frac{p}{\varrho}} = \sqrt{3}\, s_N, \tag{3}$$

donde s_N es el valor que diera Newton para la velocidad del sonido; esto es, que las moléculas giran a una velocidad casi igual a la de propagación del sonido.

Sabemos todos que el modelo molecular de Euler no está de acuerdo con la visión actual del estado gaseoso. No obstante, sus resultados sirven de esquema de lo que hay que esperar de una teoría cinética rudimentaria. La presión y la temperatura son manifestaciones de conjunto de las acciones moleculares; el modelo molecular representa a un gas como pesado, con tendencia a expansionarse indefinidamente si no se le confina, y susceptible de una compresión muy grande, si bien no indefinida, al someterse a fuerzas compresoras. El objetivo que se busca con la teoría es una *ecuación de estado,* la que nos permita afinar y corregir las leyes em-

---

[2] L. Euler, "Tentamen explicationis phaenomenorum aeris", *Comm. Acad. Sci. Petrop.* 2 (1727), 347-368 (1729). Segunda edición (Bologna), 303-322 (1741).

vnde $g^3 = ia^3 : (m - mp + np)$. Erit ergo pondus vi centrifugae aequiualens $= 2\pi nkaa \left[\left(\frac{m-i+pi-mp+pn}{m-pm+pn}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{m-pm+pn-i}{m-pm+pn}\right)^{\frac{2}{3}}\right] = \frac{2\pi nkaa}{\sqrt[3]{(m-pm+pn)^2}}\left(\sqrt[3]{(mi+pi-pm+pn)^2} - \sqrt[3]{(m-pm+pn-i)^2}\right)$.

XVI. Cum vi centrifuga efficiatur, vt bullulae aereae sese continuo extendere conentur, erit ea aequalis vi elasticae aeris; ex inuenta igitur aequatione, quanta sit aeris elasticitas, inueniri poterit. Verum cum hoc loco primum legem duntaxat, qua aeris vis elastica pro diuersis densitatis, humoris et celeritatis gradibus immutetur, persequi conueniat, factor $2\pi n$ vtpote constans negligi poterit, eritque vis aeris elastica vt $\frac{kaa}{\sqrt[3]{(m-pm+pn)^2}}\left(\sqrt[3]{(m-i+pi-pm+pn)^2} - \sqrt[3]{(m-pm+pn-i)^2}\right)$. Cum autem sit $ia^3 = (m-pm+pn)g^3$, loco a in computum duco g, vt ea tanquam constans abiici possit; Erit ergo $aa = gg\sqrt[3]{\left(\frac{m-pm+pn}{i}\right)^2}$, quo substituto erit vis elastica aeris vt $k\left(\sqrt[3]{\left(\frac{m-i+pi-pm+pn}{i}\right)^2} - \sqrt[3]{\left(\frac{m-i-pm+pn}{i}\right)^2}\right)$. Coeteris igitur paribus est aeris vis elastica vt altitudo k, velocitatem materiae subtilis in bullulis gyrantis graui descendenti imprimens.

XVII. Verum cum vires aeris elasticae inter se comparantur, id fit aeris vim expansiuam in eandem basin agentem explorando. Quamobrem, vt mensuram aeris vis elasticae, vt consuetum est, exhibeam, necesse est, vt

Fig. 96. La derivación por Euler de una ecuación de estado a partir de su teoría cinética, de los *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae,* Tomo 2, de 1727

píricas de los gases así como identificar las propiedades específicas de los distintos gases en términos de la naturaleza y las dimensiones de sus respectivas moléculas. En este sentido nos resulta particularmente sorprendente la aparición en fecha tan temprana de la teoría euleriana de la humedad. Según las ideas modernas, el efecto de la humedad sólo puede explicarse en términos de mezclas de gases.

Por otra parte, el procedimiento seguido por Euler aquí, aunque no es nada típico de su obra en mecánica racional, ofrece un ejemplo temprano de la manera de pensar actualmente identificado con la "física", especialmente en cuanto a su juiciosa combinación de hechos de la experiencia con unos pocos cálculos sencillos. De hecho, durante un siglo y medio, casi todas las investigaciones acerca de la teoría cinética de los gases seguirían este esquema.

La teoría euleriana, aunque bien puede calificarse de cinética, no es estadística. El punto de vista de moderno, toscamente bosquejado por Hermann, requiere, en cambio, una teoría que sea tanto cinética como estadística. El primero en plasmarlo en una forma matemática fue Daniel Bernoulli en un brillante párrafo aislado de su tratado de hidrodinámica[3], escrito en 1733. En el interior del cilindro, por debajo

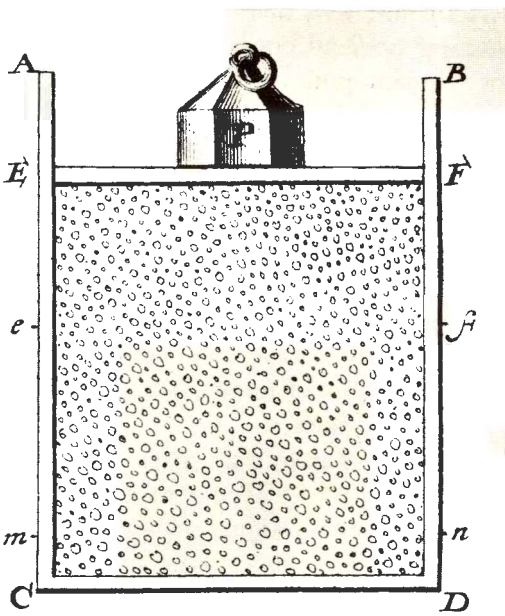


Fig. 97. Figura de Daniel Bernoulli ilustrando su teoría cinética de un gas, en la *Hydrodynamica,* 1738

[3] Sección 10, § § 1-8 y 26 de *Hydrodynamica, sive Viribus et Motibus Fluidorum,* Agentorati, 1738. La mayor parte de los temas que componen el contenido se elaboró entre los años 1728 y 1733, y al marcharse Bernoulli de Petrogrado en 1733, dejó atrás el manuscrito del volumen entero. Se incluyen fragmentos de este manuscrito, que difiere considerablemente del texto publicado cinco años más tarde, en la traducción rusa del libro completo, publicada por

dus P operculum detinens in ſitu E F non differt à preſſione Atmoſphæræ ſuperincumbentis, quam proinde per P in ſequentibus deſignabimus.

Notetur autem hanc preſſionem minime æqualem eſſe ponderi abſoluto cylindri verticalis aërei operculo E F in atmoſphæra ſuperincumbentis, quod hactenus inconſiderate affirmarunt auctores : ſed eſt preſſio iſta æqualis quartæ proportionali ad ſuperficiem terræ, magnitudinem operculi E F & ponderi totius atmoſphæræ in ſuperficiem terræ.

§. 4. Quæratur jam pondus π, quod aërem E C D F in ſpatium e C D f condenſare valeat, poſitis velocitatibus particularum in utroque aëre, naturali ſcilicet & condenſato, iisdem : ſit autem E C $=$ 1 & e C $= s$: Cum vero operculum E F transponitur in $e f$, majorem à fluido patitur niſum duplici modo : *primo* quod numerus particularum ratione ſpatii, cui includuntur, major nunc eſt, & *ſecundo* quod quævis particula ſæpius impulſum repetit : ut recte calculum ponamus incrementi, quod à *prima* pendet cauſa, particulas conſiderabimus ceu quieſcentes, atque numerum earum, quæ operculo in ſitu E F ſunt contiguæ, faciemus $= n$, & erit numerus ſimilis pro ſitu operculi in $ef = n : \left(\frac{eC}{EC}\right)^{\frac{2}{3}}$, ſeu $= n : s^{\frac{2}{3}}$:

Notetur autem fluidum à nobis conſiderari non magis condenſatum in parte inferiori, quam in ſuperiori, quale eſt, cum pondus P veluti infinitè majus eſt pondere proprio fluidi : Perſpicuum hinc eſt, hoc nomine vim fluidi eſſe, ut ſunt numeri n & $n : s^{\frac{2}{3}}$, id eſt, ut $s^{\frac{2}{3}}$ ad 1. Quod vero attinet ad alterum incrementum à *ſecunda* proveniens *cauſa*, invenitur id reſpiciendo motum particularum ; atque ſic apparet impulſus eo ſæpius fieri, quo propius ad ſe invicem ſitæ ſunt particulæ : Erunt ſcilicet impulſuum numeri reciproce ut diſtantiæ mediæ inter ſuperficies particularum : Iſtæque diſtantiæ mediæ ita determinabuntur.

Particulas ponemus eſſe ſphæricas, diſtantiamque mediam inter centra globulorum pro ſitu operculi E F vocabimus D ; diametrumque globuli deſignabimus per d : ita erit diſtantia media inter ſuperficies globulorum $=$ D $- d$: patet vero in ſitu operculi ef fore diſtantiam mediam inter centra globulorum $=$ D $\sqrt[3]{s}$, atque proinde diſtantiam mediam inter ſuperficies globulorum $=$ D $\sqrt[3]{s} - d$. Igitur reſpectu ſecundæ cauſæ erit vis aëris na-

Fig. 98a. La derivación dada por Daniel Bernoulli de una ecuación de estado a partir de su teoría cinética, en la *Hydrodynamica*, 1738

turalis E C D F ad vim aëris compreſſi e C D f ut $\frac{1}{D-d}$ ad $\frac{1}{D\sqrt[3]{s-d}}$, ſeu ut $D\sqrt[3]{s-d}$ ad $D-d$: Conjunctis vero ambabus cauſis erunt prædictæ vires, ut $s^{\frac{2}{3}}\times(D\sqrt[3]{s-d})$ ad $D-d$.

Rationi D ad d aliam ſubſtituere poſſumus magis intelligibilem: nempe ſi putemus operculum E F pondere infinito depreſſum deſcendere usque in ſitum mn, in quo particulæ omnes ſe tangunt, atque lineam mC vocemus m, erit D ad d ut 1 ad $\sqrt[3]{m}$, quâ ratione ſubſtituta, erunt tandem vires aëris naturalis E C D F & compreſſi e C D f ut $s^{\frac{2}{3}}\times(\sqrt[3]{s}-\sqrt[3]{m})$ ad $1-\sqrt[3]{m}$, ſeu ut $s-\sqrt[3]{m}\,s\,s$ ad $1-\sqrt[3]{m}$. Eſt igitur $\pi = \frac{1-\sqrt[3]{m}}{s-\sqrt[3]{m}\,s\,s}\times P$.

§. 5. Ex omnibus phænomenis judicare poſſumus aërem naturalem admodum condenſari poſſe, & fere in ſpatiolum infinite parvum comprimi; facta igitur $m = 0$, fit $\pi = \frac{P}{s}$, ita ut pondera comprimentia ſint fere in ratione inverſa ſpatiorum, quæ aër diverſimode compreſſus occupat; quod multiplex experientia confirmavit. Et poteſt certe hæc regula tuto accipi in aëre rariore quam eſt naturalis; an vero etiam poſſit in aëre admodum denſiori, non ſatis exploratum habeo: nec dum enim fuerunt experimenta ea accuratione, quæ hic requiritur, inſtituta: unico opus eſt ad definiendum valorem litteræ m, ſed eo accuratiſſime inſtituendo & quidem cum aëre vehementer compreſſo; gradus autem caloris in aëre, dum comprimitur, ſollicitè invariatus conſervetur.

§. 6. Elaſticitas interim aëris nonſolum à condenſatione augetur, ſed & ab aucto calore, & quia conſtat calorem intendi ubique creſcente motu particularum inteſtino, ſequitur, elaſticitatem aëris ſpatium non mutantis auctam, intenſiorem arguere motum in particulis aëris, quod cum hypotheſi noſtra recte convenit: perſpicuum enim eſt, eo majus requiri pondus P ad continendum aërem in ſitu E C D F, quo majori velocitate particulæ aëreæ agitantur: 1mo non difficile eſt videre pondus P ſecuturum rationem duplicatam iſtius velocitatis, ideo quod ab aucta velocitate tum numerus impetuum tum intenſitas eorundem æqualiter creſcat, utrumq; vero ſeorſim proportionale ſit ponderi P.

Igitur

Fig. 98b. Continuación de lo mismo

del émbolo (fig. 97), hay "corpúsculos muy diminutos, los cuales son impulsados por aquí y por allá con un movimiento muy rápido", y son "prácticamente infinitos en número". Al proponer este modelo, escribió Bernoulli, "Sustituyamos, pues, al aire por un fluido que se conforme a las principales propiedades de los fluidos elásticos, y así explicaremos algunas de sus propiedades ya descubiertas e iluminaremos a otras que todavía no han sido suficientemente pensadas." El peso sobre el émbolo representa la presión de la atmósfera sobrepuesta; está equilibrado por los impactos de las partículas sobre el émbolo. Hagamos ahora que el émbolo se mueva hacia abajo. Para ello, hay que suministrar un peso mayor porque, en primer lugar, el número de partículas es mayor en relación al volumen, y en segundo lugar, cada partícula golpea al émbolo más a menudo. Para calcular el efecto debido a la primera causa, podemos considerar a las partículas como si estuviesen en reposo (figs. 98a, b). Supongamos que disminuye la altura del émbolo en la razón de ζ; luego, disminuye el volumen y, en la misma medida, aumenta el número de partículas por unidad de volumen. Puesto que no varía la superficie del émbolo, el número de partículas en contacto con la misma aumenta en la razón $(1/\zeta)^{\frac{2}{3}}$. Tomemos a las partículas como esferas de diámetro d, y supongamos que sus centros inicialmente distan entre sí una "distancia media" D, de modo que la distancia media entre sus superficies es $D-d$. Una vez que haya bajado el émbolo, la distancia media entre sus centros se habrá convertido en $D\zeta^{\frac{1}{3}}$, de manera que la distancia media entre las superficies será ahora $D\zeta^{\frac{1}{3}}-d$. Supone Bernoulli[4] que la presión es proporcional a la densidad superficial de las partículas e inversamente proporcional a la distancia media entre ellas. Por tanto, infiere que:

$$\frac{p_0}{p} = \zeta^{\frac{2}{3}} \frac{D\zeta^{\frac{1}{3}} - d}{D - d}. \tag{4}$$

Podemos sustituir la razón de D a d por otra de más fácil comprensión. Supongamos que el émbolo está deprimido bajo un peso infinito, de forma que las partículas están en contacto mutuo, ocupando un volumen que está en la razón α al original. Luego, $D/d = \alpha^{-\frac{1}{3}}$, y por tanto, (4) puede escribirse así:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{1 - \alpha^{\frac{1}{3}}}{\zeta - \alpha^{\frac{1}{3}} \zeta^{\frac{2}{3}}}. \tag{5}$$

Los experimentos indican que el aire es capaz de ser tan fuertemente comprimido que podemos poner $\alpha = 0$ y deducir, por tanto, la ley de Towneley-Power-Boyle: $p \propto \varrho^{-1}$. Sin embargo, el análisis sugiere que para aire extremadamente denso, podríamos determinar α a partir de las desviaciones experimentales de dicha ley, si bien es verdad harían falta presiones muy grandes y gran precisión, así como un cuidado especial de mantener constante la temperatura. De esta

---

Isdat. Akad. Nauk SSSR, 1959. Este tomo contiene también un ensayo sobre las obras de Daniel Bernoulli escrito por V. I. Smirnov.

Daniel Bernoulli es una de las figuras más misteriosas en la historia de la ciencia y todo por la simple razón de que nadie se toma la molestia de estudiar en detalle sus obras, mientras que los historiadores continúan colmándole de alabanzas y reproches por cosas en las que nada tuvo que ver. Gran parte del pasaje sobre la teoría cinética viene imprimida en traducción inglesa en el libro *A Source Book of Physics* de W. F. Magie, McGraw-Hill, 1938, págs. 247-251; la mayoría, en una versión inglesa poco exacta debida a J. P. Berryman, se incluye en *Kinetic Theory* 1 (ed. S. G. Brush), Pergamon Press, 1965. Se publicó una traducción alemana, con una nota de P. du Bois-Reymond, en los *Annalen der Physik* 107 = (4) 17,490-494 (1859), y también, en págs. 139-143 de *Klassiche Stücke der Mathematik* de A. Speiser, Zürich y Leipzig, 1925.

[4] No me parece bien fundamentado su razonamiento.

manera calcula Bernoulli una *corrección* a las leyes de los gases al tomar en cuenta el tamaño finito de las moléculas[5].

Bernoulli afirma además que el añadir calor, aumenta el movimiento interno de las partículas. Para aumentar la velocidad, se requiere un peso mayor. "No es difícil de ver que el peso debe ser proporcional al cuadrado de esta velocidad puesto que, al aumentar la velocidad, aumentan igualmente no sólo el número de impactos sino también la intensidad de cada uno de ellos." Quizás influido por la obra anterior de sus colegas, Hermann y Euler, efectivamente concluye que:

$$p_0 = Kv^2. \tag{6}$$

Así, pues, (5) se convierte en una ecuación de estado de la forma:

$$p = K\varrho v^2 f\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}, \frac{\varrho_m}{\varrho}\right), \quad f(x, 0) = 1, \tag{7}$$

donde K es una constante adimensional, f es una función adimensional, ϱ_m es la densidad media de las moléculas, y ϱ_0 es una densidad de referencia. En el trabajo de Bernoulli, así como en el de Hermann, v es la velocidad de traslación de las moléculas. Si $\alpha = 0$, o lo que es equivalente, $f(\zeta, \eta) \equiv 1$, el resultado de Bernoulli se reduce a la primera aproximación euleriana (2), excepto que para Euler v era la velocidad de rotación. El propio Bernoulli interpretaba su análisis como la demostración de que incrementos de presión producidos por variaciones iguales de temperatura son proporcionales a las densidades, de acuerdo con la ley de Amontons. Propuso considerar a la propia magnitud v^2 como una escala de temperatura, para la medida de la cual proyectó y construyó un termómetro de aire.

El movimiento de cuerpos extensos sobre la tierra es siempre fuertemente impedido por el rozamiento; en los movimientos celestes, no ocurre así, pero el caso es que en éstos son raras las colisiones, mientras que en el modelo de Bernoulli, la presión es una manifestación de innumerables colisiones con las paredes del recipiente. No obstante, tenía Bernoulli buenos fundamentos experimentales para suponer que todas estas colisiones eran perfectamente elásticas: Roberval había aprisionado una cantidad de aire en una botella durante un período de quince años, al cabo de los cuales, al soltarlo, no pudo detectar pérdida alguna de elasticidad.

Hermann y Bernoulli concebían a las moléculas y sus velocidades de traslación como infinitamente diversas; por su parte, Euler consideraba idénticas a las moléculas y todas iguales sus velocidades de rotación, sólo variando al azar sus ejes de rotación; el punto de vista moderno de un gas puro considera que las moléculas del mismo son idénticas. Las tres teorías están de acuerdo cualitativo con los fenómenos fundamentales de los gases, y las tres también producen resultados más o menos iguales dentro de una cierta gama de condiciones. En realidad, es obvio que modelos moleculares enteramente distintos pueden llegar a predecir muchos fenómenos macroscópicos en común. No insistiré más en esta inherente inseguridad de las teorías moleculares, pero he de comentar que viene siendo olvidada en muchas de las actuales afirmaciones positivas acerca de los modelos moleculares.

Así, pues, podemos concluir diciendo que ya por el año 1738, tres miembros

---

[5] Como lo sugiere la anterior nota de pie de página, el resultado que él obtuvo no coincide con el que en la actualidad se suele aceptar.

de la escuela basiliense de matemáticos[6], todos ellos trabajando en Petrogrado, habían llegado a exponer en forma matemática los elementos del moderno concepto molecular del estado gaseoso y habían derivado ecuaciones de estado. Durante los cien años siguientes, se sugirieron otras ideas cinéticas: Entre 1750 y 1760, Lomonosov[7] hizo varias afirmaciones acerca de la estructura molecular, mencionando traslación, vibración y rotación de las moléculas. También especuló sobre el efecto de las colisiones. Casi al mismo tiempo, Boscovich[8] prefirió considerar a las moléculas como puntos matemáticos y llegó a conjeturar la existencia de complicadas leyes de fuerzas intermoleculares centrales, tales que fuesen atractivas a grandes distancias pero repulsivas a distancias moderadas. Estas visiones, al igual que las muchas especulaciones moleculares que habían precedido a las de Euler, eran demasiado confusas y demasiado enredadas como para formar la base de teorías matemáticas. A pesar de ello, debido a la reciente aparición de la profesión de historiador no-matemático de física no-matemática, tanto Boscovich como Lomonosov se han convertido en héroes para aquellos que consideran a una sugestiva imagen verbal equivalente a un cálculo matemático o a un experimento crucial.

2. HERAPATH (1816-1821)

La teoría cinética permaneció inactiva, incluso olvidada, hasta que en 1816 propuso Herapath[9] una teoría que es esencialmente la de Bernoulli. Desgraciadamente, escogió definir a la temperatura como proporcional al momento lineal en vez de la energía cinética de las moléculas. Herapath fue el primero que más o menos demostrara que la teoría cinética es capaz de proporcionar explicaciones sencillas para los cambios de estado, la difusión, y la propagación del sonido. Si bien no eran del todo correctas sus ideas, la hostilidad a que dieron lugar más bien parece haberse originado de la diferencia entre el ambiente en el que se encontró y aquél del siglo anterior. Ya por el año 1800, por lo menos en Inglaterra, se desconfiaba de

---

6 Siendo ya viejo, cincuenta años después de haber escrito su primer estudio acerca de la teoría cinética, Euler volvió al mismo en su "Conjectura circa naturam aeris, pro explicandis phaenomenis in atmosphera observatis", *Acta Acad. Sci. Petrop.* 1779: I, 167-187. La idea desarrollada es muy parecida, pero el análisis es más sencillo. En esta obra tardía, acaso influido por Daniel Bernoulli y otros, comenta Euler que a medida que aumenta v^2 en (2), también aumenta la razón de p a ϱ. Puesto que en la experiencia sucede que esta razón aumenta con la temperatura, mayor calor (esto es, temperatura) debe corresponder a mayor velocidad de giro. Y dado que medidas precisas de calor no existían en aquel entonces, propuso Euler que se tomara a $\frac{1}{3}v^2$ como la definición del calor de allí en adelante. Este segundo trabajo viene analizado en mayor detalle en la Parte IIIB de mi introducción a L. Euleri *Opera Omnia* II 13, 1956.

7 Véase págs. 8-55, 106-139, 145-163 del tomo 2 y págs. 378-409 del Полн. Собр. Соч. de Lomonosov.

8 R. J. Boscovich, *Theoria Philosophiae Naturalis...*, Viena, 1758. He consultado únicamente la edición revisada de 1763, vuelta a publicar, con traducción inglesa, por J. M. Child, Open Court, 1922. Aparte del hecho de que citara Kelvin a Boscovich como predecesor en cuanto a la teoría atómica, con el evidentísimo propósito de hacer un gesto generoso hacia el pasado y sin que debiera nada a su lectura (si es que la hubo) de los escritos de Boscovich, no puedo encontrar ninguna influencia, y mucho menos realizaciones concretas, en el tratado del erudito jesuita eslovenio.

9 J. Herapath, "On the physical properties of gases", *Annals of Philos.* (1) 8, 56-60 (1816).
"A mathematical investigation into the causes, laws, and principal phaenomena of heat, gases, gravitation, etc.", *Annals of Philos.* (2) 1, 273-293, 340-351, 401-416 (1821).
"On Mr. Tredgold's 'refutation' of Mr. Herapath's Theory", *Annals of Philos.* (2) 1, 303-307 (1821).
Mathemathical Physics..., Londres, 1847.

Fig. 99. John Herapath (1790-1869), por cortesía de Spencer D. Herapath, Esq., según un retrato pintado alrededor de 1815, destruido en 1951

las especulaciones originales de cualquier tipo y particularmente de las teorías matemáticas. La mecánica había sido establecida y agotada por Newton. El calor se explicaba en bruto por la teoría calórica y, en la escala molecular, por el movimiento vibratorio de átomos en el interior de una sustancia etérea, no precisamente una materia apta para las matemáticas.

Herapath se había educado a sí mismo, habiendo aprendido matemáticas y filosofía natural de los escritos de Newton y de los grandes matemáticos de su propia época. Presentó su trabajo principal a la Royal Society en 1820, una vez que hubo hecho las oportunas consultas previas con miembros influyentes de la misma. Fue Davies Gilbert el miembro a quien lo entregó, el cual replicó al cabo de dos semanas: "(aunque) me gustó sobremanera el gran ingenio manifestado en todo (el trabajo)..., tenía fuertes dudas acerca de la propiedad de presentar ante la Royal Society, algo tan abstruso y metafísico. Así, pues, quise que dos de los mejores matemáticos examinasen las premisas; y su opinión confirmó mis dudas. Afirman ellos que tal trabajo debería presentarse en forma aparte ante el público".

Ofreció Herapath explicar las matemáticas (las cuales, de hecho, son meramente elementales, e incluso primitivas) y es más, para confirmar sus predicciones, llegó a realizar algunos experimentos tratando de mezclas de líquidos a diversas temperaturas. Pero Gilbert y sus augustos colegas se mantuvieron firmes: "ciertos miembros del Consejo, cuyo dictamen suele respetarse en tales ocasiones, ... consideraban las investigaciones demasiado teóricas para las *Transactions,* aunque no asumían la responsabilidad de juzgar las matemáticas". Gilbert propuso que el trabajo revisado, incluyendo los experimentos, se entregase en manos del nuevo presidente y consejo, que serían elegidos un mes más tarde.

Herapath esperaba encontrar un defensor en el nuevo presidente, Sir Humphry Davy, un atomista declarado. Para poder mantenerse, estaba Herapath por aquel entonces en el proceso de montar "una escuela para matemáticas, y para preparar a hombres jóvenes para la armada". Deseaba "esforzar cada nervio para establecer mi reputación científica tanto con el fin de mantenerme en la buena opinión de mis amigos, como por el beneficio que pueda traer a mi familia, a través de mi negocio". Desgraciadamente, no fue ni el primero ni el último en aprender cuán frágil es la esperanza de ayuda por parte de los mandarines de la ciencia.

Davy le escribió a Herapath que había

"leído con atención aquellas partes (del trabajo) que son inteligibles, sin hacer un estudio matemático profundo; y aunque encuentro muy ingeniosos sus puntos de vista, debo decirle que no me impresionan con una convicción de su verdad... Antes de devolverle su trabajo, tomaré la libertad de entregarlo al filósofo más agudo (que yo conozco) de este país..."

"Se manifiesta en su trabajo tanto ingenio y un conocimiento tan minucioso del progreso en los descubrimientos, que no puedo menos de expresar mi lamento de que sus objetos y puntos de vista no se hubiesen limitado a asuntos de pura investigación experimental. Por ejemplo, la doctrina del calor, y la investigación de sus leyes, suponiendo que sea movimiento. Tal trabajo preliminar, si resultara satisfactorio, prepararía al mundo filosófico para investigaciones más amplias y más abstrusas. En su última carta, se refiere Vd. a ciertos experimentos que ha llevado a cabo, sobre calor, y los cuales confirman sus ideas generales. Cualquier investigación de este tipo, yo tendría gran placer en comunicarla a la Royal Society. Si cualquier asunto le obligase venirse a Londres, espero que me honrará con una visita; tendré mucho gusto en verle en mi casa cualquier miércoles por la tarde, después de las nueve. Siempre encontrará Vd. a algunos de nuestros más distinguidos hombres de ciencia (reunidos) conmigo aquel día. Soy, Señor, con mucha consideración,

Su obediente, humilde servidor,
H. Davy"

Herapath le hizo la visita a la más próxima oportunidad, cuatro días más tarde.

Fue presentado a Tomas Young, "quien, al preguntarle yo, dijo, que no había visto ni oído hablar del trabajo; no obstante, unos pocos minutos después, al discutir el modo de realizar ciertos experimentos, observó, 'pero Vd., en su trabajo', (refiriéndose a este mismo) 'dice...'."

Davy quiso rechazar la teoría y publicar los experimentos. Herapath se negó, pero al mismo tiempo, se vió envuelto en una discusión acerca de los experimentos, debido a su desafortunada definición de temperatura. En esto estaba equivocado; sin embargo, Davy, mostrando un talento común entre grandes e importantes dignatarios, decidió atacarle por el contrario en un punto donde manifiestamente estaba en lo cierto. Según éste, "... habiendo considerado durante mucho tiempo la cuestión del supuesto cero real, nunca me han satisfecho ninguna de las conclusiones acerca del mismo. No puedo ver ninguna conexión necesaria entre la capacidad de los cuerpos para el calor, y la cantidad absoluta que contienen; y la temperatura no mide una cantidad, sino tan sólo una propiedad del calor".

Retirado de la Royal Society, el trabajo de Herapath fue publicado en una revista pequeña en 1821, pero como ya había sido condenado por los grandes de la ciencia británica, suscitó poco interés en Gran Bretaña y ninguno en absoluto en el extranjero. La poquita atención que recibió en la prensa británica fue hostil, por lo que Herapath, en el curso de responder a algunas de las objeciones, acabó publicando un extracto de la carta en la que Davy se había referido a su comprensión del trabajo "sin un estudio matemático profundo". A raíz de esto, condenado por su propia mano pero considerándose ofendido, Davy le escribió, advirtiéndole que no esperara nada bueno de él en el futuro. La Royal Society se negó a presenciar los experimentos de Herapath, y las revistas no oficiales empezaron a rechazar sus trabajos sobre los mismos. El propio Herapath se consideraba perseguido por "la propagación insidiosa de informes". Cinco años más tarde, en 1826, expuso todo el asunto en cartas al periódico *The Times*, publicando la mayor parte de la correspondencia, relacionándola mediante su propio relato de lo sucedido. No hubo respuesta. El 10 de enero de 1826, Herapath hizo el siguiente desafío a Davy:

"Problema de Desafío a Sir H. Davy y la Royal Society.

A partir de sólo dos postulados, de menos de cincuenta palabras, el uno sobre la naturaleza del calor, el otro sobre la de un gas, determinar sólo mediante la teoría y como función de la altura, la ley de la disminución de la temperatura y de la elasticidad de cualquier aire que rodea un globo de temperatura uniforme, cuya acción varía según una ley de cualquier tipo."

Esto es sólo el comienzo de la batalla. No haré más que esbozar el resto.

Fig. 100. Primera y última página de una carta del 23 de febrero, 1864, de Herapath a un corresponsiente desconocido.–Afirma Herapath que su teoría fue "perfeccionada en 1814" antes de que tuviese conocimiento alguno de que otros habían tocado el tema. Concluye, "...Hay otras partes de mis labores en relación a los gases y sus combinaciones químicas, etc., las cuales pienso, si alguna vez pueda hallar tiempo libre para publicar lo que he tenido a mi lado durante muchos años, cambiarán las ideas mantenidas con respecto a partículas elásticas en gases y varios otros puntos de Física... El mío es un sistema estrictamente mecánico de la Física, basado en la propiedad de dureza absoluta en los átomos o partículas componentes." Las dos páginas no enseñadas explican las opiniones de Herapath acerca del choque entre cuerpos. La carta original pertenece a C. Truesdell. Las observaciones finales acerca de la electricidad sugieren que pudiese estar dirigida la carta a Maxwell, el cual se interesó por la teoría cinética entre la aparición del número de febrero, 1859, de la *Philosophical Magazine*, y el 30 de mayo del mismo año, en cuya fecha menciona la "teoría de Clausius (o mejor dicho, Herapath)" en una carta a Stokes. En su trabajo de 1860, Maxwell había citado a Daniel Bernoulli y Herapath como autores de ecuaciones de estado deducidas a partir de la hipótesis de movimientos rectilíneos uniformes; en 1862, Clausius había dado una relación de autores tempranos en teoría cinética, tal como aquella que Herapath reconoce aquí haber recibido en una carta del 8 de febrero, 1864, a la cual va a contestar

Catford Bridge,
LEWISHAM, KENT, S.E.

Feb 23 1864

Dear Sir

Indisposed health & my many pressing [illegible] will I hope plead for my delay in replying to your obliging note of the 8th Inst.

I thank you [illegible] for the trouble you have taken & the information you have collected respecting the [illegible] theory of gases, not a particle of which had I ever heard of before I published my work, except a slight allusion many years ago to Le Sage's idea of gravitation, & that was long after my theory of gases was projected in 1814.

I think I published nothing about it in Dr Thomson's Annals of Philosophy in 1816, but if I did I have no account of it by me. In 1821 however some papers of mine were published in the Annals on the collision of perfectly hard bodies & the theory of heat and gases.

The theory of the collision of absolutely hard bodies rests on the principle that each of two bodies [illegible] the

of the gaseous particles.

The theory of elastic particles is [illegible] in Section [illegible] pp. 245, 6, & 7 Vol I. Ma. P. but there are other parts of my labours in relation to gases and their chemical combination, &c which I think, if I can ever find leisure to publish what I have had by me for many years, will change ~~the ideas entertained respecting elastic particles in~~ gases & some other points of Physics.

You will perceive that mine is strictly a mechanical system of Physics, based on the property of absolute hardness in the component atoms or particles. The cause of Magnetism I think also, but Electricity, into which you have I perceive gone deeply, I could never satisfy myself about, though ~~[illegible]~~ [illegible] proving science, I tried very hard to do it.

Yours truly

J Herapath

Advierto aquí que si el lector espera un glorioso final feliz al estilo de Hollywood, en el cual se le entrega a Herapath un premio de oro y acto seguido, es elegido Miembro de la Royal Society y recibido en una ceremonia especial en la que sus antiguos detractores, corregidos y convertidos, se levantan para aplaudirle mientras que galerías enteras de bellas mujeres le hacen brindis, ese final nunca tuvo lugar. Un silencio oficial fue el único resultado del desafío de Herapath. Un segundo y tercer desafío recibieron la misma respuesta. Davy dimitió del puesto de mando, pero la guerra siguió. Herapath se quejó de que los miembros de la Royal Society murmuraban que era incapaz de resolver sus propios problemas y que sería más justo para todos que presentase batalla en el campo de las matemáticas puras. (Ya que él había hecho trabajos originales en la teoría de los gases, era evidente que allí llevaba ventaja sobre los Miembros, la mayoría de los cuales no habían realizado investigaciones originales de ningún tipo; de modo que en una prueba deportiva de contraste de habilidades, era de decencia común escoger del fondo general de enseñanza, en el que Herapath no había mostrado ningún mérito especial.) Al fin se dejó persuadir. Propuso un problema matemático y añadió una apuesta cuantiosa para apoyar su postura. No hubo réplica. En 1828, Herapath escribió una última carta al *The Times,* mencionando que el plazo de tiempo para resolver todos sus problemas había concluído sin que hubiese habido ninguna respuesta o comentario escritos. Acaba su carta diciendo: "Espero nunca volver a aparecer ante el público para tratar de este asunto."

Acaso quede reflejada la actitud de Davy en la biografía que le hiciera su hermano John Davy y que fue publicada no mucho después. Al describir las onerosas cargas que tenía que soportar un Presidente de la Royal Society, con respecto a los autores desilusionados, escribió: "El hombre de habilidad real o de verdadera dignidad estaría por encima de la Royal Society, y no condescendería a sentir resentimiento por cualquier acto de injusticia hacia sí... Tiene el mundo por su tribunal; y solamente es necesario que publique los resultados de sus investigaciones, y es seguro que se le hará justicia...". Esta cómoda actitud no parece haberse confirmado en el caso de Herapath. Todavía hoy, Davy sigue siendo un gran héroe de la ciencia, mientras que incluso especialistas en mecánica estadística a menudo nunca han oído hablar de su contrincante. El tiempo ha demostrado que el dictamen de un Presidente de la Royal Society, en un caso en el que sus opiniones eran no sólo equivocadas sino francamente necias, tiene más peso que páginas enteras de sólidos y lógicos cálculos realizados por un pensador original pero desconocido y no perteneciente a las jerarquías del saber. Parece que ni Davy ni nadie más de la Royal Society de aquel entonces sabía bastante física matemática como para apreciar la obra anterior de Hermann, Bernoulli y Euler, la cual nunca se mencionó en el curso de la controversia.

3. JOULE Y KRÖNIG (1851, 1856)

La teoría de Herapath se reunió con sus predecesoras en el olvido (fig. 100), mas no por mucho tiempo. En 1810, Joule[10] publicó una nota en la que, sin escribir una sola ecuación ni utilizar símbolo alguno, calculaba la velocidad de las moléculas.

---

[10] J. P. Joule, "Some remarks on heat and on the constitution of elastic fluids" (1848), *Mem. Manchester Lit. Phil. Soc.* 9, 107-114 (1851) = (con notas añadidas) *Phil. Mag.* (4) 14, 211-216 (1857) = *Papers* 1, 290-297.

"Supongamos que se llena una envoltura del tamaño y de la forma de un pie cúbico con hidrógeno gaseoso, el cual, a 60° de temperatura y 30 pulgadas de presión barométrica, pesará 36,927 grs. Supongamos, además, que la citada cantidad está dividida entre tres partículas elásticas, iguales e indefinidamente pequeñas, cada una pesando 12,309 grs.; y asimismo, que cada una de estas partículas vibra entre lados opuestos del cubo, y mantiene una velocidad uniforme excepto en el instante del choque; se requiere hallar la velocidad a la cual ha de moverse cada partícula de forma que se produzca la presión atmosférica de 14.831.712 grs. en cada uno de los lados del cubo." Para resolver este problema, Joule calculó el momento lineal cedido a la pared en cada choque. Entonces, "puesto que es evidente que la presión será proporcional al cuadrado de la velocidad de las partículas", dicha velocidad puede obtenerse directamente. El resultado que obtuvo Joule es 6.255 pies/sg., lo que es, al igual que el valor encontrado por Euler un siglo atrás, una velocidad extraordinariamente alta y que, de haberse fijado alguien en este trabajo, bien podría haber transformado en oposición activa la apatía con que acogieron los científicos británicos a la obra de Joule.

En conjunto, lo que hizo Joule fue sencillamente repetir en una forma más primitiva los cálculos de Bernoulli y Euler. Había empezado en 1844 trabajando con ideas muy parecidas a las eulerianas, pero viendo en 1848 el escrito de Herapath, acabó adoptando la hipótesis de éste acerca de la traslación molecular en vez de la rotación. Al igual que Euler, a partir de (2), concluyó que la temperatura es proporcional a v^2, pero como ahora v es la velocidad del movimiento de traslación, se sigue que la temperatura ha de ser proporcional a la *vis viva.* Inmediatamente llegó Joule a la conclusión de que "el cero de temperatura está a 491° por debajo del punto de hielo del agua", siendo aquella la temperatura a la cual la presión disminuye hasta cero según la extrapolación de la ley de Amontons y utilizando un valor experimental para la constante de proporcionalidad correspondiendo al hidrógeno. Joule también progresó sobre sus predecesores al proponer una teoría concreta de los calores específicos, pero en esto se equivocó.

Me he preocupado de reproducir aquí los argumentos de Bernoulli y Joule en sus formas originales. De hecho, su obra no fue advertida cuando se publicó. El cálculo de Bernoulli aparece en medio de un tratado sobre cisternas, conductos y fuentes; además su teoría no era más que una de las varias teorías cinéticas de su época y apenas era de esperar que resultase ser la única que estaría de acuerdo con los conceptos posteriores acerca del estado gaseoso. Por su parte, Joule era un particular sin educación ni contactos universitarios, y no tuvo el apoyo de ninguno de aquellos poderosos grupos de eminentes autoridades que controlan a la ciencia intimidando a los científicos, no solamente en su tiempo sino, desgraciadamente, también en el nuestro. Hay personas que pretenden que aquellas investigaciones que no ejercieron ninguna influencia sobre la posteridad no tienen lugar en una historia de la ciencia. Acaso quieren transferir la filosofía operativa de la física moderna al

---

En el artículo suyo sobre Joule, citado al fin de este ensayo, dice Mendoza que los cuadernos no publicados de Joule demuestran que por 1844-1845 sus ideas se aproximaban a aquellas de Euler de un siglo atrás (aunque, claro está, sin llegar al mismo nivel de matemática y definición), si bien fue precisamente la lectura de las publicaciones de Herapath lo que le indujo a adoptar la hipótesis de éste en octubre de 1848.

Al igual que Herapath, Jouse se educó por sí mismo con lo que eludió el contagio por la podrida tradición del Cambridge de su época. Pero contrariamente a su predecesor, tuvo la suerte de encontrar entre los hombres nuevos que, entusiasmados, trasplantaban a Gran Bretaña la manera francesa de concebir la física matemática, uno que fue tanto defensor enérgico y constante como adherente y colaborador: Guillermo Thomson.

dominio de la historia, y considerar así que los trabajos que no hayan sido leídos por físicos, al igual que los sucesos no observados por éstos, son del todo inexistentes. Para tales personas, la historia de la teoría cinética comienza en 1856 con una publicación de Krönig[11].

Las ideas de Krönig, si bien son sustancialmente las mismas de Bernoulli y Joule, son a la vez un poco más fáciles de seguir y un poco menos correctas.

Cierto es que afirmase Krönig que hay un elemento estadístico en el problema. Pero no menos cierto es que abiertamente expresase una visión de la teoría de la probabilidad que, hasta hace muy poco, ha sido compartida, aunque con más reservas, por casi todos sus sucesores en teoría cinética, y que permanece implícita en muchos libros de texto para físicos. Acto seguido de sostener que los gases constan de esferas perfectamente elásticas que se mueven de forma aleatoria en el espacio vacío, escribió: "Mediante las leyes de la teoría de la probabilidad, podemos reemplazar este caos total por una regularidad completa." Su modelo mecánico, ligeramente generalizado, se basa sobre las ideas siguientes:

1. Un gas químicamente homogéneo en equilibrio se representa como un sistema de masas puntuales o cuerpos rígidos idénticos, llamadas "moléculas", que se mueven aleatoriamente, de modo que el número de las que se mueven en una dirección dada es, por término medio, igual al de las que se mueven en cualquier otra dirección.
2. El volumen de las moléculas es despreciable con respecto al volumen del vacío entre ellas.
3. Las fuerzas intermoleculares son despreciables excepto en el instante de choque; así, pues, las moléculas se mueven a velocidad uniforme hasta que tropiecen contra otras moléculas o contra la pared.
4. Puesto que un gas encerrado y aislado no muestra ninguna tendencia a perder su presión, los choques de las moléculas entre sí y sobre las paredes han de ser perfectamente elásticos. En particular, si las moléculas son esferas rígidas, pueden despreciarse las colisiones moleculares por completo, ya que cuando chocan dos esferas tales, el movimiento subsiguiente es el mismo como si se hubiesen traspasado sin influencia mutua.

No es preciso que repita aquí los razonamientos de Krönig. Como puede verse en cualquier texto bueno de física o química[12] del primer año de la carrera de ciencias, estas ideas fácilmente se prestan al cálculo de la presión que resulta de la transferencia de momento lineal debido a los impactos de las moléculas sobre las paredes. La respuesta correcta es fácil de obtener:

$$p = \tfrac{1}{3}\varrho\overline{v^2}, \tag{8}$$

pero el hecho es que Krönig no logró sacarla. En primer lugar, se equivocó en el

---

[11] A. Krönig, "Grundzüge einer Theorie der Gase", *Annalen der Physik* 99=(4) 9, 315-322 (1856).

[12] Vg., §§ 113-117 del texto *Mechanics, Molecular Physics, Heat, and Sound*, de Millikan, Roller, & Watson, Boston, 1937. Dado que este libro ha sido recientemente objeto de una burla oblicua por parte de un famoso físico nuclear durante un curso de conferencias concebido para reemplazarlo, y dado que hay pocas probabilidades de que jamás vuelva a tener una ocasión para citarlo, hago constar aquí mi constante gratitud por mi buena suerte en haber sido alumno de primer curso en el California Institute of Technology en 1938-1939 y haber tenido

cálculo de la cantidad de movimiento perdida. A continuación, desechando todo factor de proporcionalidad, obtuvo: $p = \varrho \overline{v^2}$. También cometió varios errores más a lo largo del trabajo.

Así como se había olvidado la obra de Hermann, Euler y Bernoulli, y no se hizo caso a Herapath, considerándole como un chalado, en cambio, el trabajo de Krönig, que no es siquiera correcto en sus detalles, fue publicado, leído y respetado, siendo desde entonces considerado generalmente como el punto de partida de la moderna teoría cinética. En realidad, este estudio no consiguió ningún avance. Para explicar, pues, el apoyo que recibió, podemos comentar que ya en los años justo antes de su impresión se había establecido experimentalmente la teoría mecánica del calor, y que, por otra parte, el propio Krönig, por poco importante que nos resulte actualmente, fue en su día una persona de peso suficiente como para que otros científicos le hicieran caso.

4. WATERSTON (1843-1846)

Dado que pudo suceder que nadie se fijara en los estudios cinéticos de Hermann, Euler, Bernoulli, Herapath y Joule, ¿qué podremos decir de la obra de Waterston? Puede que ninguno de ustedes haya oído hablar de él siquiera. El 11 de diciembre de 1845, esto es, seis años antes de la publicación de Joule y once años anterior a la de Krönig, llegó a manos de la Royal Society, procedente de Bombay, una memoria de Waterston titulada "Acerca de la física de medios compuestos de moléculas libres y perfectamente elásticas en un estado de movimiento". El año siguiente, la Royal Society publicó un resumen[13] de media página sobre el citado trabajo, apareciendo el nombre de su autor incorrectamente escrito. En él sólo podemos leer que Waterston utilizó un modelo molecular similar al de Bernoulli y que trató las leyes de los gases, el efecto de masas moleculares diferentes, la condensación y la dilatación y el valor de la *vis viva,* la resistencia de medios a una superficie en movimiento, el equilibrio de la atmósfera, y la velocidad del sonido. En 1851, con motivo de una reunión de la British Association, Waterston publicó un resumen más descriptivo de una página entera de extensión (fig. 102)[14]. Entre otras cosas, afirma que "la *vis viva* de aquellos movimientos (aleatorios) en una parte dada de un gas constituye la cantidad de calor contenido en la misma", y que "el equilibrio de presión y calor entre dos gases ocurre cuando es igual el número de átomos en la unidad de volumen, y es igual la *vis viva* de cada átomo. La temperatura es, pues, en todos los gases, proporcional a la masa de un átomo multiplicada por la media del cuadrado de la velocidad de los movimientos moleculares, siendo medida a partir

---

así el privilegio de aprender los elementos de mecánica del mismo. Su física clara y bien fundamentada, matemática limpia si bien sencilla, generosidad en el alcance y en el detalle, buena escritura, apta selección de problemas, alto nivel de rigor histórico en conjunto le merecen un lugar único entre libros de texto.

[13] J. J. Waterston, "On the physics of media that are composed of free and perfectly elastic molecules in a state of motion" (resumen), *Proc. R. Soc. London* 5, 604 (1846) = *Phil Trans. R. Soc. London* A 183, 78 (1893) = *Papers* 317-318. No parece verosímil que este resumen haya sido compuesto por el propio Waterston.

[14] Waterston, "On a general theory of gases", *Rep. Brit. Assn. Adv. Sci.* 1851, 6 = *Phil. Trans. R. Soc. London* A 183, 79 (1893) = *Papers* 318-319.

Fig. 101. John James Waterston, 1811-1883, a los 46 años, según una fotografía tomada por su sobrino George Waterston, reproducida por cortesía de Robert Waterston, Esq.

de un cero absoluto[15] de 491° por debajo del cero del termómetro de Fahrenheit". Luego fue Waterston el primero en publicar la moderna definición de la temperatura basada en la teoría cinética así como el caso más sencillo de la ley de equipartición.

---

[15] De acuerdo con otros trabajos de Waterston, esto debe ser una errata de imprenta, siendo la cifra correcta 461°.

La memoria original de Waterston es una exposición magistral de todas las nociones de teoría cinética que hasta aquí hemos explicado, así como de otros conceptos relacionados. Resulta de lectura fácil y persuasiva. Se resumen los resultados en amplias afirmaciones escritas en letra cursiva al final de cada razonamiento. Debido a un fallo en los cálculos, obtuvo Waterston que $\gamma = \frac{4}{3}$ en vez de $\frac{5}{3}$, lo que invalida varios otros números, no obstante, el razonamiento es impecable. Conocía al dedillo todos los relevantes datos experimentales de que se disponía en aquel tiempo, y contiene su trabajo abundantes resultados numéricos y comparaciones con los experimentos. Hasta se incluye un cálculo del equivalente mecánico del calor. Es defectuoso el tratamiento que da de la resistencia encontrada por una superficie en movimiento, por la misma razón que lo fue el propuesto por Newton, a saber, que no toma en cuenta la acción de las moléculas reflejadas sobre las que están a punto de chocar. Asimismo y como era de esperar, tampoco es satisfactoria la solución que ofrece para el problema del equilibrio de la atmósfera, una cuestión compleja de la que todavía no se tiene más que una comprensión imperfecta. Finalmente, en una nota a modo de apéndice, construyó Waterston una teoría de la combinación química de los gases, la cual sólo se difiere de la teoría actualmente aceptada en cuanto que no reconocía a las moléculas como compuestas de átomos indivisibles. Al final de esta nota incluye una gran tabla de propiedades moleculares de sustancias específicas. El afirmar, pues, que ya por el año 1845, Waterston había elaborado todas las ideas y resultados cinéticos que serían publicados por otros en los próximos once años, manifiestamente no llega a hacer justicia a este gran trabajo suyo.

Al presentarlo a la Royal Society, escribió: "Sea cierto o no que los gases consten de tales proyectiles diminutos y elásticos, parece que vale la pena investigar los atributos físicos de medios talmente constituidos, y ver qué analogías ofrecen con respecto a las elegantes y simétricas leyes de los cuerpos aeriformes. Hace algunos años, hice un esfuerzo de conseguir esto mismo, procediendo de modo sintético a partir de esta hipótesis fundamental... Los resultados me han aparecido tan alentadores, aun derivándose de aplicaciones muy humildes de las matemáticas, que me han llevado a esperar que una exposición popular de la línea del razonamiento podría no resultar inaceptable para la Royal Society."

En 1845, los físicos creían que el calor o bien es un fluido que es capaz de pasar a través de la materia continua, o que es un movimiento vibratorio de moléculas. No querían pensar en otras posibilidades. Por otra parte, como quiera que se fue desarrollando, primeramente en Gran Bretaña y posteriormente en el Continente, un progresivo estrechamiento de los horizontes de la física hasta llegar a casi tocarse en la recta central de tablas de datos procedentes de experimentos, toda investigación de tipo especulativo, de no ser escrita por una autoridad reconocida, se había convertido ya en algo de mal gusto, siendo relegada a la mera filosofía. Sucedía entonces al igual que ahora que era preferido el dócil y laborioso cálculo de detalles, dentro de los puntos de vista comúnmente aceptados, por encima de la búsqueda de principios. Así encontramos que el primer árbitro que leyó el trabajo de Waterston se oponía al supuesto fundamental de que la presión de un gas resulta de los choques moleculares, el cual, según afirmaba, no era "de ninguna manera una base satisfactoria para una teoría matemática". A pesar de que concedía que el estudio "ofrece mucha habilidad y numerosas concordancias sorprendentes con los hechos en general así como con valores numéricos proporcionados por la observación", no lo consideraba merecedor de ser publicado en las *Philosophical Transactions.*

solids; seeing that any amount of rigidity, however small, will account for the phænomena, if we adopt certain suppositions as to molecular forces.

V. Our knowledge of molecular forces is not as yet sufficiently advanced to enable us to use experiments on the velocity of sound as a means of determining accurately the coefficients of elasticity of solids.

If we adopt for them the hypothesis already stated with respect to liquids, a theoretical investigation given in an Appendix shows that the velocity of sound in a cylindrical rod of an uncrystallized substance, whose surface is absolutely free, will be less than that in an unlimited expanse in a ratio which is sensibly $1 : \sqrt{2}$ for a very slender filament, and approaches $\sqrt{2} : \sqrt{3}$ as the diameter of the rod increases; but the absolute freedom of the surface cannot be realized in practice; the means used in fixing the rod tend to restrain the lateral oscillations and accelerate the velocity of sound. The ratios ascertained by experiment range from $\sqrt{2} : \sqrt{3}$ to near equality; but they are not sufficiently numerous to form data for any definite conclusions.

The oscillations treated of in the special problems of the body of the paper being of a kind called *nearly longitudinal*, a second Appendix is added, containing the general equations of another kind, called *nearly transverse*, in uncrystallized bodies.

On a General Theory of Gases. *By* J. J. WATERSTON, *Bombay.*

The author deduces the properties of gases, with respect to heat and elasticity, from a peculiar form of the theory which regards heat as consisting in small but rapid motions of the particles of matter. He conceives that the atoms of a gas, being perfectly elastic, are in continual motion in all directions, being restrained within a limited space by their collisions with each other, and with the particles of surrounding bodies. The *vis viva* of those motions in a given portion of gas constitutes the quantity of heat contained in it.

He shows that the result of this state of motion must be to give the gas an elasticity proportional to the mean square of the velocity of the molecular motions, and to the total mass of the atoms contained in unity of bulk; that is to say, to the density of the medium. This elasticity, in a given gas, is the measure of temperature. Equilibrium of pressure and heat between two gases takes place when the number of atoms in unity of volume is equal, and the *vis viva* of each atom equal. Temperature, therefore, in all gases, is proportional to the mass of one atom multiplied by the mean square of the velocity of the molecular motions, being measured from an *absolute zero* 491° below the zero of Fahrenheit's thermometer.

If a gas be compressed, the mechanical power expended in the compression is transferred to the molecules of the gas increasing their *vis viva*; and conversely, when the gas expands, the mechanical power given out during the expansion is obtained at the expense of the *vis-viva* of the atoms. This principle explains the variations of temperature produced by the expansion and condensation of gases—the laws of their specific heat under different circumstances, and of the velocity of sound in them. The fall of temperature found on ascending in the atmosphere, if not disturbed by radiation and other causes, would correspond with the *vis viva* necessary to raise the atoms through the given height.

The author shows that the velocity with which gases diffuse themselves is proportional to that possessed by their atoms according to his hypothesis.

LIGHT, HEAT, ELECTRICITY, MAGNETISM.

On the Conduction of Electricity through Water.
By F. C. BAKEWELL.

Mr. Bakewell stated the results of some experiments on the conduction of electricity by water, made with a view to prove that an electric current may be transmitted for a considerable distance through unprotected wires immersed in water. The experiments were conducted on Saturday last in one of the Hampstead ponds. A thin copper wire (No. 20), three hundred and twenty feet long, was stretched across the pond, and two copper plates ten inches square, to which wires were soldered,

Fig. 102. El resumen de Waterston de 1851 dando su enunciado de la equipartición

Por su parte, el segundo árbitro escribió que "el trabajo no es más que una sarta de disparates, indigno siquiera de leerse ante la Sociedad". Acabó siendo rechazado el trabajo. El sistema de críticas secretas, todavía en uso casi exclusivo en la actualidad, consiguió no sólo enterrar el genio de Waterston en olvido permanente, sino además, proteger el anonimato de los eminentes árbitros[15a].

Según las normas de la Society, los manuscritos entregados a la misma se convertían en propiedad suya para siempre. Waterston mandó una petición escrita para que se le devolviera su manuscrito, pero no consiguió nada. En 1891, Lord Rayleigh lo encontró en los archivos e hizo que se publicase en la misma revista a la que se había mandado hacía cuarenta y ocho años[16]. Lo dotó para esta publicación de una introducción en la cual defendió la escrupulosidad del segundo árbitro, "una de las autoridades mejor calificadas de su día", y añadió el consejo de que "las investigaciones altamente especulativas, especialmente de autores desconocidos, como mejor se dan a conocer al mundo es a través de cauces distintos del proporcionado por una sociedad científica...", y también este otro: "el joven autor que se cree capaz de grandes logros generalmente haría bien en asegurarse el reconocimiento favorable del mundo científico mediante trabajos de alcance limitado y cuyo valor es fácilmente apreciado, antes de embarcarse en vuelos mayores." Debemos suponer que estas palabras, que de publicarse hoy, no dudaríamos en calificar de sarcasmo, fueron escritas con toda buena fe victoriana. Rayleigh alabó el "maravilloso atrevimiento" de la obra y el gran avance que logró; asimismo, le concedió a Waterston prioridad con respecto a la ley de equipartición, basándose en el abstracto de 1851. Por estas fechas, Waterston llevaba muerto ya diez años[17]. El hecho de que no hiciese ninguna pretensión de prioridad más tarde, cuando la teoría cinética se transformó en un campo reconocido, no es difícil de explicar. En primer lugar, se enteró de que parte de sus ideas ya habían sido expuestas con anterioridad por Bernoulli y Herapath. Por otra parte, se consideraba sujeto a la norma de la Royal Society que hacía a ésta propietaria del manuscrito, puesto que por implicación había aceptado dicha norma al mandar el escrito a la Society. Por último, su fe religiosa[18] le prohibía la pretensión a la eminencia personal, y su único objeto era el triunfo de la verdad. Su actitud crítica hacia los líderes reconocidos de la ciencia, tales como Lord Kelvin (el cual, según parece, fue del todo inocente con respecto al asunto del gran estudio de Waterston), dio lugar a que posteriormente se le considerara como un maniático. Uno de sus parientes contaba que "cualquier mención a la Royal Society suscitaba en él un lenguaje muy fuerte y despreciativo... mostraba inquietud

---

15a En 1965 se revelaron los nombres de los árbitros: el Reverendo Baden Powell, profesor Savilian de Geometría de Oxford, y Sir J. Lubbock, al cual se consideraba un experto en el campo de la teoría de los gases. No he podido encontrar ninguna contribución a la ciencia que se deba a alguno de estos dos hombres.

La prioridad concedida cincuenta años después del hecho es la prioridad legal honrada únicamente en su infracción. Aunque la obra de Waterston –incluso su prioridad *indisputable* no sólo en el descubrimiento sino en la publicación del principio de equipartición– se ha comentado una y otra vez por los escritores sobre la historia de la física, permanece totalmente desconocido su nombre incluso entre especialistas en teoría cinética y mecánica estadística. Es, al parecer, tan poco probable que un físico tome nota de lo que escriban los historiadores como que realice investigaciones históricas por su cuenta.

16 Waterston, "The physics of media that are composed of free and perfectly elastic molecules in a state of motion" (con una introducción y notas de Lord Rayleigh), *Phil. Trans. R. Soc. London* A 183, 1-79 (1893)=*Papers* 207-331.

17 Juan Jacobo Waterston, 1811-1883.

18 Era sandemaniano.

will continually impinge against each other by reason of their *vis insita* alone, and will suffer no loss of collective momentum. The surface of impact is supposed to be spherical, and may either be the actual surface of the solid molecule, or a surface of powerful molecular repulsion surrounding it.

I. The distance traversed by a molecule, after impinging on one and before encountering another, is inversely as the density of the medium.

If all the molecules were arranged equidistant, the number at any distance from a central point will be as the square of that distance, but the intercepting effects of each of that number is as the inverse of the square of the distance; hence the intercepting effects are uniform, and accumulate as the distance increases. Let $d =$ diameter of molecular surface of impact; then *as* the distance $(x\,d)$, beyond which a molecule cannot go without impinging on another, *is to* the mean distance of the molecules $(n\,d)$, *so is* the number of circles (n^2) (whose common diameter is equal to that of the molecular surface of impact) that can be inscribed in an equilateral triangle, the side of which is equal to the mean distance of the molecules *to* unity. Hence, $x\,d \doteqdot n^3 d$, and $x \doteqdot n^3 \doteqdot$ to the inverse of the number of molecules contained in a given volume. [Upon the accuracy of this reasoning depends almost all that follows.]

II. The density of the medium being constant, the impinging distance will vary reciprocally as the square of the diameter of the molecular surface of impact.

For $n\,d$ being constant, $n \doteqdot \frac{1}{d}$, and $x\,d \doteqdot n^3\,d \doteqdot \frac{1}{d^2}$.

III. The impinging distance being constant, the density will vary directly as the diameter of the molecular surface of impact.

For $x\,d$ being constant, $x = \frac{1}{d} = n^3$, hence $d = \frac{1}{n^3} =$ density.

IV. Let there be two elastic parallel immovable planes, and between them, in a common perpendicular, let two molecules that have unequal velocities continually impinge, then shall the sum of the squares of their velocities be always equal, and the velocities will con-

Fig. 103. Una página del *Thoughts on the Mental Functions* de Waterston, 1843, explicando su concepto de camino libre medio

y disgusto a la mención de científicos, con la excepción de Faraday, y utilizaba un lenguaje muy violento con respecto a algunos que se destacan mucho en la estimación pública".

La sugerencia de Rayleigh de utilizar "otro cauce" pide un comentario más. Unos treinta años antes de Waterston, Herapath, después de su experiencia análoga con la Royal Society, no había conseguido más que el olvido con la publicación de su artículo en una revista menos conocida. En 1843, Waterston había empleado el cauce de una pequeña imprenta para un libro sobre la física de la mente; al final incluía una nota que es virtualmente un abstracto del trabajo largo posteriormente rechazado por la Royal Society. No nos sorprende que la publicación en este cauce no atrajo interés alguno; si los caudillos de la ciencia son hostiles a ideas nuevas hasta cuando se presentan ante su consideración oficial, hay pocas probabilidades de que vayan a molestarse en buscarlas en lugares oscuros. En esta nota de 1843 introdujo Waterston el concepto de *camino libre medio*[19] (fig. 103), el redescubrimiento del cual por Clausius en 1857 dio lugar a una nueva época en teoría cinética. También a éste se debe la primera asignación explícita de una probabilidad en física, si bien basándose en razones difusísimas. En 1860, sólo quince años después de la humillación de Waterston, apareció la primera de las cuatro grandes memorias de Maxwell, las cuales elevaron toda la teoría cinética a un nuevo nivel de abstracción, rigor y aplicabilidad, y que crearon la ciencia de la mecánica estadística. La descripción de cómo esta obra de Maxwell, suplementada por la masa de cálculos detallados, si bien no siempre claros o afortunados, de Boltzmann, arrojó en la penumbra a todos los trabajos anteriores en teoría cinética, nos llevaría más tiempo que el preciso para una conferencia única.

A pesar de que diecinueve publicaciones anteriores sobre otros temas le habían dado una alta reputación, para su primer trabajo de teoría cinética, escogió Maxwell una revista informal[20] en la que propuso hacer de "la hipótesis de que... partes diminutas están en movimiento rápido" el "objeto de la curiosidad racional". Seis años más tarde, en 1866, sólo veintiún años después de haber rechazado con tanto desprecio la hipótesis waterstoniana de la constitución molecular de los gases, publicaba la Royal Society en sus *Transactions* una gran memoria de Maxwell que partía precisamente de esta hipótesis. Con sus cálculos concretos de probabilidades y sus detalladas estimaciones de los efectos de colisiones sobre un conjunto infinito de moléculas sujetas a aquella tan extraña y restringida ley de repulsión según la inversa de la quinta potencia de la distancia, resulta esta obra muchísimo más matemática y especulativa que el ensayo rechazado de Waterston. Esto se debe, en parte, a una diferencia de personas: Maxwell era ya miembro establecido de la Royal

---

[19] Waterston, Props. I y II de "Note on the physical constitution of gaseous fluids and a theory of heat", al final de *Thoughts on the Mental Functions,* Edimburgo, 1843 = *Papers* 183-206. Claro está que a nadie se le podía culpar por no haber advertido un escrito publicado de modo tan oscuro, pero entonces resulta obvia la contradicción de los caciques de la ciencia al aconsejar a los jóvenes con pensamientos originales que se mantengan al margen de las revistas importantes *y al mismo tiempo* que ganen su reputación inicial publicando en páginas que nadie lee.

[20] La revista *Philosophical Magazine,* la cual había publicado en la primera mitad del siglo, junto con numerosas investigaciones valiosas, gran cantidad de sandeces y crasos errores. No conozco las circunstancias de esta revista por lo que no puedo imaginarme por qué ni Herapath ni Waterston probaron publicar sus trabajos en ella.

En la segunda frase de su estudio, nombra Maxwell a Bernoulli, Herapath, y Joule como los primeros en explicar las leyes de los gases sobre la base de movimientos rectilíneos e impactos.

Society, y no un simple desconocido allá lejos en Bombay. Pero más que esto, fue la diferencia temporal de veintiún años: la Royal Society estaba ya dispuesta a ponerse al nivel de los alemanes.

5. ALABANZA A LA DESORGANIZACION DE LA CIENCIA

Los historiadores antiguos gustaban de sacar una moraleja de sus narraciones, a veces llegando hasta el extremo de alterar a la propia Historia para conformarla a sus preconcepciones personales. Con el reciente surgir de la historia de la ciencia como actividad profesional, han caído en descrédito no sólo la alteración de los hechos sino también todo tipo de moralizaciones basadas en la historia. No siendo historiador de profesión, me considero privilegiado de seguir siendo un simple lector de historia a la antigua usanza. No me avergüenzo de creer, juntamente con Herodoto, Maquiavelo, Montaigne, y Leibniz, que el mayor provecho de la historia consiste en las lecciones que nos enseña para irlas aplicando a nuestra conducta hoy día. Los últimos trabajos en mecánica de medios continuos se han inspirado en un re-examen directo de los clásicos de la mecánica: En particular, fueron consultados Newton, los Bernoulli, Euler, Cauchy, Stokes, y Maxwell para estudiar sus métodos de investigación, criterios de inferencia, y filosofías de las ciencias naturales, con el propósito de intentar corregir las malas costumbres tan extendidas e incluso exaltadas gracias a las llamadas matemáticas aplicadas y mecánica aplicada de la primera mitad de este siglo. La conferencia de esta tarde sobre la temprana teoría cinética proporciona una lección de distinta índole, una lección acerca de la organización.

Hemos visto cómo, dos veces en un período de treinta años, unánimemente y arropada en rectitud, vino la Royal Society a ocultar a la verdad en favor de lo errado, y cómo dos veces marginó con desprecio a un gran hombre al tiempo que exaltaba a bobos bulliciosos que en su vida entera llegaron a contribuir nada a la ciencia que ha pasado a nuestro tiempo. Para ver cuán ridícula era la posición de la Royal Society, sólo es menester exponerla. La Sociedad, o al menos sus oficiales, consideraban a la misma como hasta cierto punto comprometida en apoyo de cualquier trabajo que publicase. En consecuencia, era peligroso aceptar una investigación "especulativa", incluso admitiendo la posibilidad de que algunas de éstas habrían de resultar correctas. La responsabilidad por las decisiones se delegaba a los árbitros. Actualmente, en lo que atañe a la teoría cinética de los gases, resulta difícil encontrar algo menos importante que lo que sobre ella pensaron en los años 1816 ó 1845, dos árbitros anónimos que nunca habían tocado la materia. Pero si puede encontrarse ese algo tan difícil de hallar, será la pregunta de si la Royal Society como tal había de comprometerse o no en favor de la teoría cinética en 1816 o en 1845. No obstante, la posición de la Sociedad en aquellos dos años era tan fuerte como para cortar de raíz a dos carreras en física matemática que ya en sus breves comienzos prometían ser de las más grandes del siglo, y de las cuales hasta los fragmentos desenterrados se resaltan entre los monumentos de la mecánica. Por el contrario, si consideramos a la mayor parte de los honorables miembros de aquella institución entre los años 1800 y 1850, vemos que es casi como buscar una aguja en un pajar encontrar siquiera un solo trabajo o experimento que todavía merezca la más mínima atención. Desde luego, no es ésta la imagen que tiene el profano de una gran academia de ciencia. Se le enseña que la verdad científica es demostrable, irrespectivamente de quién lo haga, y que, por otra parte, aquellos que

se sientan en las grandes academias son los grandes científicos de la época. Puesto que los incidentes que acabo de relatar contradicen ambas creencias, puede que se tomen como crítica de la Royal Society; no fue esa mi intención. Podría contar de sucesos análogos en el Institut Francés, en la Academia de Berlín, y en la de Petrogrado —en una palabra, de incidentes que ocurrieron antes de 1850 en *todas* las academias famosas. (No me atrevo a acercarme más todavía a la fecha actual.)

El que mi moraleja sea de distinta índole puede verse del hecho de que no existen historias parecidas respecto de ninguna de nuestras propias y numerosas academias de ciencia en América. Estas incluyen desde clubs locales, siempre ansiosos de reclutar nuevos contribuyentes de cuotas, hasta un cuerpo semi-oficial de influyentes administradores científicos cuyos consejos son a veces pedidos pero rara vez seguidos por el Departamento de Estado y el Presidente. Nadie podría con justicia pretender que las academias americanas mantienen unos standards de cualificación para ser miembro que siquiera se aproximen a los de sus grandes rivales europeos, mas asimismo, tampoco se puede en justicia imputar a nuestras instituciones más modestas tales errores fatales como han sido cometidas una y otra vez por los augustos Olimpos oficiales de Europa. Tengo buenos motivos para dudar que nuestros académicos sean más sabios ni más amables[21]. La diferencia hay que buscarla no en las personas, sino en la importancia que se les concede. La *Ciencia* es independiente de pasiones y títulos; no así, los *científicos.* El hecho de que la Royal Society dos veces unánimemente consideró a la teoría cinética de los gases como un conjunto de disparates de arriba a abajo, no tiene más relación con la verdad o falsedad de dicha teoría que la relación que hubiese habido entre el valor verdadero de π y lo que sostuviese cierta legislatura del medio-oeste, de haber aprobado ésta una ponencia, que de hecho consideró en toda seriedad, con el propósito de establecer un patrón de $\frac{4}{3}$ en la ley. Lo que es, por desgracia, no sólo ridículo sino positivamente venenoso en las academias europeas es la importancia que se dan a sí mismas y que los demás les permiten gozar. Hasta el momento presente, los científicos en los Estados Unidos han estado más felices. Pocos se interesan de nuestras academias lo bastante como para enterarse de quién es y quién no es miembro de las mismas. Y las academias, hasta la fecha, no se erigen en árbitros sobre las verdades de la ciencia ni las vidas de los científicos.

Comenzando por arriba, la diferencia se extiende hacia abajo por todo nuestro trabajo. El ayudante europeo que discute abiertamente con su profesor se arriesga no sólo a la pérdida de toda oportunidad de continuar con sus investigaciones, sino a la imposibilidad de conseguir jamás un empleo decente. En los Estados Unidos, no se aprecia más a un trabajo de investigación porque aparezca entre tapas selladas por una sociedad académica o profesional, ni menos si ha sido rechazado por una tal institución antes de publicarse en una revista privada; para el joven gigante, el atropello de sus profesores es un camino más honorable hacia la fama, la promoción, así como la módica prosperidad que permite la profesión científica, que la servil piedad filial que espera el profesor europeo de sus discípulos, y que recibe mientras siga viviendo. Nuestra vida académica presenta al extranjero un espectáculo lamen-

---

21 Son, no obstante, menos rencorosos y más dados a perdonar y olvidar. Estoy seguro de que algún día habrían elegido a Herapath, aunque claro está, no por su peculiar y excéntrica teoría cinética, sino por la segunda mitad de su vida, que la dedicó a la bien asentada ciencia aplicada a los ferrocarriles.

table de caos. Nadie sabe quién está en la cima. Si el profesor *A* es un semi-dios en la Universidad 1, sólo hemos de consultar al profesor *B* de la Universidad 2 para aprender que en *su* departamento, *A* no llenaría siquiera los requisitos para ser ayudante. Cierto es que *A* pertenece a seis comités nacionales, tiene una subvención de un millón de dólares del Buró Central de Espías, y ha publicado ocho populares libros de texto. Pero *B,* quien señala a los textos de *A* como modelos de tontería, ha publicado 216 trabajos de investigación en colaboración con veintitrés co-autores y además es consejero de cuatro grandes corporaciones, editor ayudante de cinco revistas y vice-presidente de un sindicato profesional. Los cursos que exige *A* como requisito mínimo para conseguir un título bajo su égida ni siquiera se dan en la universidad de *B.* Y luego está también el profesor *C,* que defiende a la "buena enseñanza", negándoles a sus alumnos contacto alguno con nada que tenga menos de cincuenta años de circulación. Incluso nuestros administradores, frenéticamente ocupados en controlar a sus propias facultades, suman su contribución a la desorganización exterior al negarse a otorgar convalidaciones completas a estudiantes que se quieren transferir a su universidad habiendo bebido su mediocridad de otras fuentes de las musas. Por último, tomando precaución para que ninguno de sus empleados les usurpe cualquier semblanza de gobierno ni se hagan tan notables que pudiera bajar en prestigio la universidad si se les marchara, según toque, ora alaban, ora marginan al héroe local del momento, así manteniendo sus panteones en constante estado de flujo.

Es de mal gusto alabar a la tierra propia y criticar a lo ajeno, de no haber fuertes motivos para ello. Yo lo hago porque hoy, el día de la unanimidad masiva, cuando la democracia social triunfantemente nos nivela a todos en una servidumbre voluntaria tan informalmente uniforme como cordialmente temerosa, hay presiones de todas partes para que se unifique la ciencia. Las sociedades y academias empiezan a exigir un formato unificado para los trabajos de investigación, así como un "estilo" consistiendo en una infantil jerga polisilábica según el patrón holandés. Los funcionarios, acostumbrados a tratar sólo con otros funcionarios y perplejos en un mundo donde las aplicaciones de la ciencia mantienen en vilo a las fortunas y las vidas de todos, se dirigen a las cabezas de estas instituciones, imputándoles una autoridad que de hecho es suya sólo por defecto si no por arrogamiento. El gobierno, que hace dos décadas empezó a dar y nos acostumbró a recibir, comienza ahora a extender sus agarraderas. El público, siempre temeroso en su ignorancia, ve en la magnitud del presupuesto la medida de excelencia tanto de la ciencia como del bienestar, y abre las puertas del común tesoro a aquellos más dispuestos a gastarlo, bien sea en cavar un agujero hasta la China, llevar sífilis a la luna, o ahogar la mente humana en una densa nube de cifras. Está claro que grandes actividades sociales como éstas, al igual que la erección de las pirámides, requieren una organización central y una transparente cadena de mando. Y mientras afectan a la ciencia a lo más en sus márgenes, son tan gigantescas y tan venenosas que hasta el contacto marginal puede ser fatal.

La temprana historia de la teoría cinética de los gases ilustra el principio de que en cuestiones de la ciencia, la mayoría siempre se equivoca. Para una democracia social, este principio resulta difícil de aceptar. No podemos mover un paso sin que se nos recuerde que están en el error aquella minoría de personas que prefieren el silencio a la música ambiental; deben escuchar el sosegador ronroneo porque "le gusta a la mayoría de la gente". La gran sociedad, la sociedad afluyente, se postula la humana doctrina de alimentar a los débiles y los lisiados, de subvencionar a

los incompetentes y los memos; ve con desconfianza y temor al fuerte, al pensativo, al sabio. Una mente no subyugada proclama un hombre antisocial. Hasta la "protesta" se acoge con un alto nivel de tolerancia, si no una capitulación absoluta, en tanto que sea el insensato grito populachero de los desafortunados, de los autodesempleados, y los jacobinos. Lo que no puede aguantar la sociedad moderna es un hombre que piensa. Aunque es cierto que la democracia social ha llegado a un nivel de ilustración tal que es capaz de renunciar a decidir por plebiscito un buen valor para el número π, todavía tiene que refugiarse en las opiniones de los "expertos". Todos oímos de lo que "dicen los médicos" y de lo que "dicen los científicos". Esto llega hasta el extremo de que si a un científico se le ocurre decirles a sus amigos profanos que rechaza algún principio que, según la prensa, es "actualmente aceptado por la ciencia", corre el riesgo de levantar sus sospechas de que es simplemente un maniático.

Todo esto no tiene importancia mientras sólo sea el público el que haga el bobo. El peligro aparece cuando los propios *científicos* toleran que se les organice, cuando empiezan a *respetar y obedecer* las declaraciones que emitan acerca de la ciencia las academias, las universidades, las sociedades, y finalmente, los gobiernos. ¡Ojalá nunca venga aquel día! ¡Ojalá sigan siendo nuestras academias, simples clubs; nuestras universidades, marañas aisladas de papeleo local y politiqueo de departamento; nuestras sociedades profesionales, listas de suscripción para anunciantes publicitarios! En tanto que preservemos la dispar, enrevesada y mutuamente recelosa ineficiencia que actualmente rige la circunstancias del trabajo científico en este país, un Herapath o un Waterston, suponiendo que apareciese, podrá comer y trabajar y descubrir.

NOTA BIBLIOGRAFICA

La primera mitad de esta conferencia coincide mayormente con la primera mitad de la primera clase del curso de mecánica estadística que llevo enseñando cada dos o tres años desde 1950. Se basa, naturalmente, en mi propia lectura de las fuentes.

Merecen especial atención los estudios de S. G. Brush sobre la historia de la teoría cinética y la mecánica estadística[22]. Cuando comenzaron a aparecer éstas, las primeras publicaciones sustanciales acerca del tema de esta conferencia, claro está que hice uso de las mismas, consiguiendo así enriquecer mi texto original. En particular, ciertos detalles personales de los asuntos de Herapath, Waterston, y Joule se dieron a la luz por vez primera en los trabajos de Brush y Mendoza.

Esta conferencia, en una forma sustancialmente igual a la que aquí aparece, se leyó como Conferencia Centenaria en la Universidad de Kentucky (1966) y en el Centro para la Filosofía de la Ciencia, Universidad de Minnesota (1967).

---

22 S. G. Brush, "The development of the kinetic theory of gases, I. Herapath", *Annals of Science* **13**, 188-198 (1957).
Idem "II. Waterston", *idem* **13**, 273-282 (1957).
Idem "III. Clausius", *idem* **14**, 185-196 (1958).
Idem "IV. Maxwell", *idem* **14**, 243-255 (1958).
Idem "V. The Equation of State", *American Journal of Physic* **29**, 593-605 (1961).
"John James Waterston and the kinetic theory of gases", *American Scientist* **49**, 202-214 (1961).
"The Royal Society's first rejection of the kinetic theory of gases (1821), John Herapath versus Humphry Davy", *Notes and Records of the Royal Society of London* **18**, 161-180 (1963).
"Foundations of statistical mechanics 1845-1915", *Arch. Hist. Exact Sci.* **4**, 145-183 (1967).
Véase también E. Mendoza:
"A sketch for the history of the kinetic theory of gases", *Physics Today* **14**, 36-39 (1961).
"The surprising history of the kinetic theory of gases", *Mem. Manchester Lit. Phil. Soc.* **105**, 1-14 (1962/3).

VII. REACCIONES DE LA HISTORIA DE LA MECANICA SOBRE LA INVESTIGACION MODERNA

RESUMEN

Se demuestra mediante ejemplos que un conocimiento de la historia de la mecánica puede llevar a nuevos descubrimientos en la mecánica de la actualidad.

Los ejemplos aducidos tratan de: *a)* La forma de columna más fuerte para empuje axial. *b)* La forma que hay que darle a una viga para que cuando esté cargada tome una configuración deseada. *c)* Los requisitos de invariancia para las ecuaciones constitutivas de materiales no lineales.

A continuación se traza un paralelismo entre los inútiles intentos de definir fuerza durante el siglo diecisiete y los igualmente inútiles empeños decimonónicos en definir entropía.

Como paralelismo relacionado, se comparan los artificios especiales utilizados por los matemáticos del siglo diecisiete para resolver problemas de movimiento particulares mediante métodos *cuasi-estáticos,* antes del descubrimiento de las leyes generales del movimiento, con los esfuerzos de nuestro siglo para describir fenómenos energéticos irreversibles mediante alguna pequeña perturbación de los métodos y conceptos termoestáticos. Se sugiere un intento de crear y organizar la estructura lógica de una verdadera termodinámica de procesos irreversibles siguiendo el camino fructuosamente iniciado hace doscientos años por Euler y otros al convertir los desorganizados métodos y principios especiales de la mecánica del siglo diecisiete en la teoría general que actualmente conocemos.

1. PROEMIO

Mi tema fue sugerido por el Comité de Programación. Es un tema bien espinoso.

En primer lugar, nadie podría con justicia pretender que siquiera una vaga idea del verdadero desarrollo histórico de la mecánica es *necesaria* para poder hacer buena investigación hoy en día. Hay colegas eminentes que manifiestamente combinan habilidad en la investigación con desdeño por la historia y hay quienes la trazan bien con amable indiferencia, bien con una fantástica distorsión o inversión de los hechos históricos, o bien con una ingenua credulidad histórica semejante a la creencia en Santa Claus, el principio de mínima acción, o el mayor bien para el mayor número. Sin embargo, son muchos los que se ven llevados, al parecer impulsivamente, a hacer afirmaciones históricas, las cuales, acaso no serán incompatibles con el desdeño ni, por cierto, tampoco con la ignorancia y la ingenuidad, mas innegablemente refutan cualquier alegada pretensión a la indiferencia. Yo podría nombrar cierto texto sobre elasticidad donde el autor parece que se esfuerza por no entrar en la historia de la materia, pero no puede resistir la tentación de informar al curioso lector que las constantes de Lamé toman su nombre "de Gabriel Lamé (1795-1870),

un matemático francés". No obstante, dicha autoridad no revela a quién se debe el nombre del módulo de Young. Otro autor bien conocido escribe en su prefacio:"El emparejamiento de un nombre particular con un teorema o un método simplemente indica una asociación existente en mi propia mente. Habré de dejar el entronque histórico correcto a aquellos que tengan el tiempo y el gusto por tales investigaciones". El texto que sigue está repleto por doquier de teoremas y métodos que toman sus nombres de personas diversas, a menudo con referencias. Luego está el eminente colega que deliberadamente pone a las magnitudes y teoremas los nombres de sus profesores y amigos. A toda objeción de que en realidad tales cosas pertenecen a autores muy anteriores, responde con sonrisa condescendiente, que dado que él por su parte había aprendido acerca del esfuerzo leyendo un trabajo de Adolf Braun, ¿por qué había de mencionar el nombre de Euler o Cauchy? Estos ejemplos que acabo de citar pueden interpretarse de diversos modos en términos de capricho, descuido, desorden, irregularidad, ignorancia o incluso mentira con respecto a la realidad histórica, pero ciertamente sugieren un sentimiento de culpabilidad más que de indiferencia.

De *indiferencia histórica* en verdad hay poco. Los autores de textos elementales abiertamente valoran a la historia como ayuda pedagógica, si bien, como suele suceder en la pedagogía de masas, no parece importar si las afirmaciones que se hacen son verdaderas o falsas, pues cada autor copia de otro y luego glosa sobre lo copiado. Esta práctica, que se da ya en el propio Mach, parece que tiene un cierto propósito propagandístico: generalmente el de inculcarnos la creencia de que toda ciencia es básicamente experimental, a menudo el de rematar aquel ogro predilecto de la ciencia popular: la Edad Media, y a veces el de ridiculizar a la religión o la filosofía. Como resultado, ya en nuestros días de estudiante, a cada uno nos fue grabada una cierta imagen de la historia de la mecánica. ¿Quién no ha leído y escuchado cómo Galileo destrozó la tradición aristotélica al escuchar los golpecitos simultáneos de las bolas que había dejado caer desde la Torre Inclinada de Pisa? En algunas obras populares éstos y otros experimentos de Galileo vienen descritos en todo detalle. Nuestros profesores nos animaron a poner en tela de juicio a demostraciones matemáticas y pruebas experimentales pero nunca sugirieron que importase en lo más mínimo que sus afirmaciones acerca de los hechos históricos fueran verdaderas o falsas. ¿Cuántos de nosotros, ya con el pelo canoso y un tanto escaso, hemos vuelto a los orígenes de la mecánica de primer año para encontrarnos con que toda la historia de la Torre Inclinada no es más que una leyenda literaria? [1][1]. Y si hemos

---

[1] El experimento ya tenía más de 950 años cuando, según la opinión popular, lo inventó Galileo. Juan el Gramático, comentarista muy erudito de Aristóteles que vivió a fines del siglo V y primeros del siglo VI A.D., afirma que "Aristóteles equivocadamente supone que la razón de los tiempos requeridos para movimiento a través de diversos medios es igual a la razón de las densidades de los medios... Pero esto es completamente erróneo, y puede corroborarse nuestro punto de vista más eficazmente por la observación real que por ningún tipo de discusión verbal. Pues si se deja caer desde la misma altura dos pesas, una de las cuales tiene muchas veces el peso de la otra, se verá que la razón de los tiempos requeridos para el movimiento no depende de la razón de los pesos, sino que la diferencia es muy pequeña". Ver págs. 219-220 del texto *A Source Book in Greek Science* de Cohen & Drabkin, Harvard University Press, 1958. Claro está que no hay ninguna indicación de que fuera Juan el Gramático el primero en realizar este experimento, ni que concediera gran importancia al resultado. En el pasaje del que se ha tomado esta cita, demuestra más interés por estimar los efectos de la resistencia de los medios que en las propiedades de la caída en el vacío.

En el mundo occidental, ya se había repetido el experimento en Holanda antes de que Galileo se hiciera cargo de la cátedra de Pisa. En una obra publicada primeramente en holandés

llegado a saber esto, ¿qué es lo que hemos pensado después acerca del célebre raciocinio frío y objetivo del científico? Junto con la crítica y la duda frente a asertos sobre el mundo físico, ¿no se nos ha enseñado una credulidad ante la experiencia humana tan ingenua como la de cualquier escriba frailuno ante los milagros? ¿No nos ruborizamos por nuestra ingenuidad al enterarnos de la escrupulosa cadena de pruebas y razonamiento por la que el humanista Lorenzo Valla demostró en el siglo quince la falsedad de los Decretales de Constantino? La fábula de la Torre Inclinada se habría esfumado al primer sondeo de una mente de tal calibre. Y cuando leemos de los experimentos de Galileo con cuerpos deslizándose por un plano inclinado, ¿nos arrodillamos ante el altar del héroe, o como buenos empiristas, vamos corriendo a repetir los experimentos? Esto último es precisamente lo que hizo Mersenne (alrededor de 1634); los resultados de sus propias pruebas le llevaron a concluir [2]: "Dudo que el Sr. Galileo jamás hiciera los experimentos de caídas a lo largo del plano, puesto que en ninguna parte lo dice, y la proporción que da a menudo contradice (los resultados) experimentales".

En matemática pura no viene como sorpresa cuando se vuelve a plantear un viejo problema que ha permanecido largo tiempo sin resolver, o cuando se le da nue-

---

en 1586, en latín en 1608, en francés en 1634, y en inglés en la pág. 511 de sus *Principal Works,* Vol. 1 (Amsterdam, 1955), escribió Stevin: "Tomemos (como hemos hecho el muy docto Sr. Jan Cornets de Groot, diligentísimo investigador de los secretos de la Naturaleza, y yo) dos esferas de plomo, la una diez veces más grande y más pesada que la otra, y dejémoslas caer desde una altura de 30 pies encima de un tablero o algo sobre el que den un sonido perceptible. Entonces se encontrará que... juntos chocan con el tablero tan simultáneamente que sus dos sonidos parecen uno y el mismo golpe. Se encuentra también que lo mismo sucede en la práctica con dos cuerpos igualmente grandes cuyas gravedades están en la razón de uno a diez...". Sin embargo, in su *de Motu,* escrito por el año 1590, dice Galileo que "a menudo hacía una prueba" de caída libre "desde una alta torre", mediante la cual encontró que la madera comienza a caer más velozmente que el plomo, pero que a la larga el plomo saca ventaja a la madera. En la misma obra escribió también: "No tiene importancia si de cuando en cuando la experiencia contradice a la teoría bien fundamentada". En este pasaje temprano, pues, sale Galileo mal parado en la comparación con Juan el Gramático, tanto en cuanto observador de la naturaleza como en cuanto teórico. El hecho de que fuera Galileo en esencia un idealista neo-platónico más que un empirista, y de que no fuera el autor *ni* de la teoría matemática de los movimientos uniformemente acelerados, *ni* de la idea de que la gravedad induce aceleración uniforme en todos los cuerpos, *ni* de los experimentos clásicos sobre la caída libre, *ni* de experimentos repetibles sobre movimientos a lo largo de planos inclinados, no ha conseguido desplazarle de su liderazgo heroico de la ciencia en la opinión del vulgo. Resulta más difícil resumir en pocas palabras los motivos filosóficos y sociales de un gramático convertido a la cristiandad, que escribió 3.000 págs. de comentarios sobre Aristóteles durante el principio de la Edad Media, de un grupo de clérigos del Alto Gótico, y de dos protestantes holandeses, uno de los cuales no siendo conocido más que por su poesía griega y latina y por ser el padre del abogado Grotius.

El Dr. John P. Moran me ha llamado la atención al estudio de T. B. Settle, "Un experimento en la historia de la ciencia", *Science* **133,** 19-23 (1961). Lo que hizo Settle fue reconstruir el aparato de Galileo tan exactamente como podía determinarse y repetir los experimentos bajo condiciones tan similares como fuera posible a aquellas que vienen especificadas en el texto de Galileo. Confirma Settle las afirmaciones de Galileo de que las distancias varían según los cuadrados de los tiempos de caída en un plano dado, y de que para planos diversos varían los tiempos juntamente con la distancia e inversamente con la raíz cuadrada de la caída vertical. Comenta que estos resultados no son equivalentes a la fórmula $s = \frac{1}{2} g t^2$ para la caída libre, y que no viene implicada ninguna determinación de g. Añade Settle la interesante observación: "Para cuando tanto la teoría como la experimentación habían evolucionado hasta el nivel implícito de los *Discorsi,* Galileo habría tenido suficiente confianza en el valor de cada una independientemente, sin consideración a su mutua confirmación". A esto añado yo que si la experimentacion realmente hubiese jugado el papel en la *aceptación original* de la mecánica "clásica" del que, al parecer, están persuadidos muchos filósofo-científicos, no habríamos tenido que esperar hasta el año 1961 para un análisis crítico y una *repetición* de un experimento supuestamente fundamental descrita por primera vez en 1638.

va vida a una vieja teoría, hace tiempo conocida, al hacer nueva aplicación o nueva fundamentación de ésta. A modo de explicación se suele decir que la matemática es una ciencia muy antigua y que sus verdades son eternas. Otro tanto se podría decir de la mecánica. Así como los biólogos y sicólogos puede que tengan pocos motivos para consultar fuentes que sean de hace más de diez años, según varios me lo han confesado, no ocurre lo mismo en mecánica. La ciencia de la Mecánica, como disciplina matemática, es casi tan antigua como la propia Matemática. No debemos pensar que la mecánica griega se limitaba al enunciado de los pocos principios que acostumbramos atribuirle. Como sucede en cualquier gran ciencia, los principios surgieron de la experiencia con casos particulares, y la antigua estática se convirtió en un saber desarrollado al tiempo que llegaron a comprenderse sus principios. Arquímedes pudo determinar las posiciones de equilibrio, así como su estabilidad, para cualquier segmento recto de un paraboloide de revolución de peso específico arbitrario flotando en un líquido. Dudo que un profesor actual de mecánica, aplicando el cálculo integral y confiando en 2000 años de experiencia en hidrostática, pudiera resolver este problema en menos de una semana de duro esfuerzo. Euler, por ejemplo, utilizando tan sólo un criterio infinitesimal de estabilidad en vez del razonamiento geométrico finito de Arquímedes, acabó por abandonar el problema y no incluyó los resultados de éste en su tratado. No es que recomiende a Arquímedes al moderno ingeniero metido en investigación, sino que menciono su obra para indicar que la mecánica antigua no es necesariamente fácil. Tampoco es cierto que sólo trata de problemas ya resueltos o anticuados. No todos estamos obligados a buscar la verdad únicamente en el núcleo del átomo; los principios de la mecánica, al igual que el sistema de números reales, aun en la llamada "era atómica" continúan ayudándonos a entender a la Naturaleza al verter nueva luz sobre viejos problemas y aclarando problemas nuevos mediante soluciones viejas.

2. La elastica de seccion optima

Un viejo problema más próximo al interés contemporáneo es aquel de encontrar la carga de pandeo de una *elástica,* de Bernoulli-Euler sujeta a empuje por los extremos. En la introducción histórica a su tratado de elasticidad, escribe Love que Lagrange utilizó esta teoría "para determinar la forma de columna más fuerte". Por su parte, Pearson, en su historia de elasticidad nos dice además del resultado de Lagrange que "con justicia puede decirse que hizo temblar a las falacias arquitectónicas de aquel entonces", pero no descubre cuáles fueron dichas falacias. En 1770, Lagrange, refiriéndose al éntasis de las columnas construídas en tiempos de los griegos, se propuso hallar la forma que debería darse a una columna de altura y volumen dados para que aguantase el máximo empuje posible sin pandear. Pretendió establecer que la mejor forma es un cilindro circular; en otras palabras, que el éntasis no aumenta la resistencia. Dudando de la verdad de este resultado, busqué este trabajo de Lagrange entre sus Obras Completas y me encontré con que ya hace noventa años el editor, Serret, había detectado en el análisis numerosas equivocaciones que no pudo corregir. Pero además, me pareció insuficiente la formulación matemática de Lagrange. Acto seguido, propuse el problema a H. F. Weinberger y J. Keller. Cada uno halló la solución que corresponde a la hipótesis lagrangiana de que las secciones rectas son círculos centrados en el eje; pero la solución no es la columna

uniforme sino la que está hinchada por la mitad. De hecho, un éntasis apropiado (fig. 104) aumenta la resistencia en 1/3. Resultó que el perfil óptimo, algo parecido a una cicloide, ya había sido hallado en 1851 por Clausen:

$$\frac{r}{l} = \frac{2}{\sqrt{3}\,\alpha}\,\operatorname{sen}\theta, \qquad \frac{z}{l} = \frac{1}{\pi}\left(\theta - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right), \tag{1}$$

donde l es la longitud de la columna, r es el radio de la sección recta, z es la distancia a lo largo del eje, y α es la razón de l al radio constante de la columna cilíndrica de igual volumen. Entre tanto, sin embargo, Keller llevó el asunto más lejos. Abandonando el supuesto de secciones circulares y considerando columnas de forma arbitraria, demostró que la torsión no aumenta la resistencia, pero que una columna cuyas secciones sean triángulos equiláteros con aristas paralelas entre sí y centroides colineales y siguiendo un perfil con éntasis determinado por el resultado de Clausen, tiene una carga de pandeo un 61,2 por ciento mayor que la del correspondiente cilindro circular [3]. Conjeturó que tal columna es la más resistente de todas las de altura y volumen dados, y añadió algunos resultados parciales al respecto. No obstante, hasta la fecha no se ha dado ninguna demostración concluyente[2].

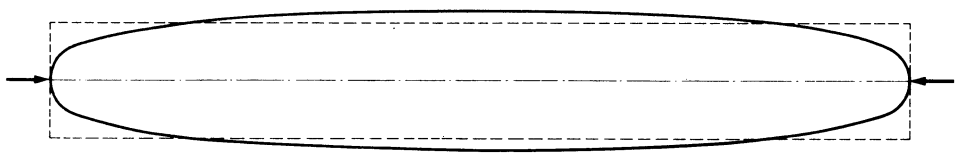


Fig. 104. Perfil de la columna más resistente de las que tienen el volumen del cilindro indicado con la línea a trazos.

3. La elastica de forma deseada una vez cargada

Si bien es cierto que este problema concreto tiene interés de por sí, existe otro viejo problema en la teoría de la *elástica*, poco conocido hasta recientemente, que tiene implicaciones mayores. En 1952, al tener que criticar un trabajo sobre teoría de vigas para una revista de ingeniería, seguí una intuición histórica de que Euler debió haber conocido todo aquello, y empecé a leer su tratado de 1744. No sólo fue correcta mi intuición sino que, al seguir leyendo, me encontré con unas pocas líneas acerca de un problema de un tipo que no había sido tratado en la literatura moderna de aquel entonces, a saber: ¿qué forma ha de tener un cuerpo para que tome una geometría dada bajo una carga dada? En la teoría linealizada este problema es equivalente al usual de determinar la deformación causada por las cargas dadas: Uno solamente ha de aplicar al cuerpo dado desplazamientos iguales a los contrarios de aquellos producidos en él por las fuerzas dadas. Sin embargo, en la teoría finita, tal solución por superposición ya no es válida. El hecho de que son distintos los dos problemas lo vio Jaime Bernoulli quien, con su habitual intuición

[2] La conjetura de Keller es cierto. El profesor Pólya me ha enseñado un razonamiento sencillo que la obtiene como corolario a un teorema que se demuestra en su artículo, "More isoperimetric inequalities conjectured and proved", *Comm. Math. Helv.* **29**, 112-119 (1955).

$x = \int ds \sin.\left(\frac{s}{b} + \int \frac{ds}{r}\right)$, & $y = \int ds \cos.\left(\frac{s}{b} + \int \frac{ds}{r}\right)$;

unde curva quæſita per quadraturas conſtrui poterit.

Fig. 17. 51. Hinc determinari poteſt figura a m B, quam lamina in ſitu naturali habere debet, ut a potentia P in directione A P ſollicitante in lineam rectam A M B explicetur. Sumpta enim longitudine $AM = s$; erit momentum potentiæ ſollicitantis pro puncto $M = Ps$; radius oſculi autem in M, per hypotheſin, erit infinitus ſeu $\frac{1}{R} = 0$. Sumpto jam in ſtatu naturali arcu $am = s$, poſitoque radio oſculi in $m = r$; quia hæc curva convexitate ſua rectam A B ſpectat, in calculo præcedente poni debet r negativum. Hinc erit $Ps = \frac{Ekk}{r}$, ſeu $rs = aa$; quæ eſt æquatio naturam curvæ a m B complectens.

52. Cum igitur ſit $\frac{1}{r} = \frac{s}{aa}$; erit $\int \frac{ds}{r} = \frac{ss}{2aa}$; ſeu erit amplitudo arcus a m ut quadratum ipſius arcus. Hinc coordinatæ orthogonales x & y pro hac curva a m B ita definientur, ut ſit $x = \int ds \sin. \frac{ss}{2aa}$, & $y = \int ds \cos. \frac{ss}{2aa}$: Scilicet in circulo, cujus radius $= 1$, abſcindi debet arcus $= \frac{ss}{2aa}$, cujus ſinus & coſinus ad coordinatas determinandas aſſumi debent. Ex eo autem quod radius oſculi continuo decreſcit, quo major capiatur arcus $am = s$, manifeſtum eſt curvam in infinitum non protendi, etiamſi arcus s capiatur infinitus. Curva ergo erit ex ſpiralium genere, ita ut infinitis peractis ſpiris in certo quodam puncto tanquam centro convolvatur, quod punctum ex hac conſtructione invenire difficillimum videtur. Non exiguum ergo analyſis incrementum capere exiſtimanda erit, ſi quis methodum inveniret, cujus ope, ſaltem vero proxime, valor horum integralium $\int ds \sin. \frac{ss}{2aa}$ & $\int ds \cos. \frac{ss}{2aa}$ aſſignari poſſet, caſu quo s ponitur infinitum; quod Problema non indignum videtur, in quo Geometræ vires ſuas exerceant.

53. Sit

Fig. 105. La solución de Euler para la forma libre de una elástica tal que toma una forma recta al ser sometida a una carga asignada en el extremo

acerca de los principios e ideas que serían fructíferos en un estudio posterior, en aquel primerísimo trabajo sobre la teoría matemática de la elasticidad publicado en 1694, incluyó entre los problemas "dejados a la industria de nuestros lectores", aquel de hallar "cuál debería ser la curvatura de la banda de modo que debido a una carga fijada o a su propio peso o ambos a la vez tomase la forma de una línea recta (esto sería útil a la hora de diseñar los brazos de palancas y ejes...)". Bernoulli no era de los que proponen problemas que ellos mismos son incapaces de resolver; de hecho, había indicado ya la solución, pero su fragmento tratando de lo mismo no llegó a publicarse hasta la fecha de aparición del tratado de Euler, casi cincuenta años más tarde.

Tanto Bernoulli como Euler consideraron el caso de una viga que, al recibir una carga final asignada, se deforma hasta tomar una forma rectilínea. Euler halló la forma inicial requerida en función de lo que posteriormente se han llamado integrales de Fresnel, y demostró que era una espiral (fig. 105). Al estudiar este trabajo me fijé en cuánto más fácil resulta resolver este problema inverso que el problema directo más usual, y construí un método general [4]. En vez de una ecuación diferencial de segundo orden, se obtiene una cuadratura doble y queda manifiesta la solución general. Como ejemplo, tomé el caso donde se aplica una presión uniforme. De nuevo la forma libre es la de una espiral, pero se obtiene una noción más clara de las curvaturas iniciales que ha de poseer una viga para que aguante diversas presiones mirando la fig. 106, donde las líneas a trazas indican los resultados erróneos que se siguen de la teoría linealizada. Otro caso particular produce la solución del problema general del segmento o aro de pistón, donde se busca una forma tal que el segmento se acomode justamente al colocarse en un cilindro de forma dada [5] (figura 107). Las aplicaciones, no obstante, son menos importantes que la idea en sí, la cual se presta a la teoría general de la deformación elástica finita, formulada hace varios centenares de años y convertida durante estos últimos quince años en el objeto de un redescubrimiento y una explotación tan impresionantes como lucrativos. En esta teoría disponemos actualmente de numerosas soluciones tanto exactas como aproximadas, así como de algunos poderosos teoremas generales. *A fortiori,* la solución dentro de la misma del problema de la forma libre no viene dada por la solución de los problemas de contorno standard. Debería ser más fácil plantearlo en términos generales[3]. Hasta la fecha, no se conoce prácticamente nada acerca del efecto de las fuerzas de volumen y el efecto directo de las fuerzas superficiales sólo se ha calculado mediante desarrollos en serie. La razón es que en los problemas de contorno usuales los propios puntos donde se aplican las fuerzas de volumen y superficiales son *a priori* desconocidos. En el problema de la forma libre, desaparece esta dificultad pues las fuerzas actúan en puntos conocidos. Si, para materiales isótropos, consideramos que las relaciones entre esfuerzos y deformaciones vienen dadas por $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{c})$, donde $\boldsymbol{t}$ es el tensor de esfuerzos de Cauchy y $\boldsymbol{c}$ es el tensor de deformaciones de Cauchy ($c_{km} = g_{\alpha\beta} X^{\alpha}_{,k} X^{\beta}_{,m}$, donde $\boldsymbol{X}$ es la posición inicial y $\boldsymbol{x}$ es la correspondiente posición en la configuración cargada),

---

[3] Es inútil ponerse a buscar soluciones exactas válidas para materiales isótropos arbitrarios sujetos tan sólo a cargas superficiales, puesto que los correspondientes tensores de deformaciones vienen determinados de una vez y para todas por los Teoremas de Ericksen, los cuales pueden aplicarse hacia adelante, como usualmente se hace, o hacia atrás, como en el caso presente. [*Nota añadida para la reimpresión.* Los resultados que obtuvo Ericksen para cuerpos incompresibles no los resumió en forma de teorema y no agotan todos los casos.]

entonces las ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno para los esfuerzos son de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{t}}{d\boldsymbol{c}} \cdot \nabla \boldsymbol{c} + \varrho \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \quad & \text{en el interior del cuerpo} \\ \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{s} \quad & \text{en la superficie frontera,} \end{aligned} \tag{2}$$

donde $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{n}$, y $\boldsymbol{s}$ son todas funciones dadas de la posición, $\boldsymbol{x}$, en la configuración cargada. Es ésta una ecuación diferencial de segundo orden que han de satisfacer las posiciones iniciales $\boldsymbol{X}$ como funciones de $\boldsymbol{x}$. Así como métodos especiales han tenido que ser descubiertos, o permanecen sin descubrir, para poder tratar los problemas de contorno directos de la elasticidad finita, para el sistema (2) son inmediatamente aplicables todos los teoremas y métodos usuales para sistemas dife-

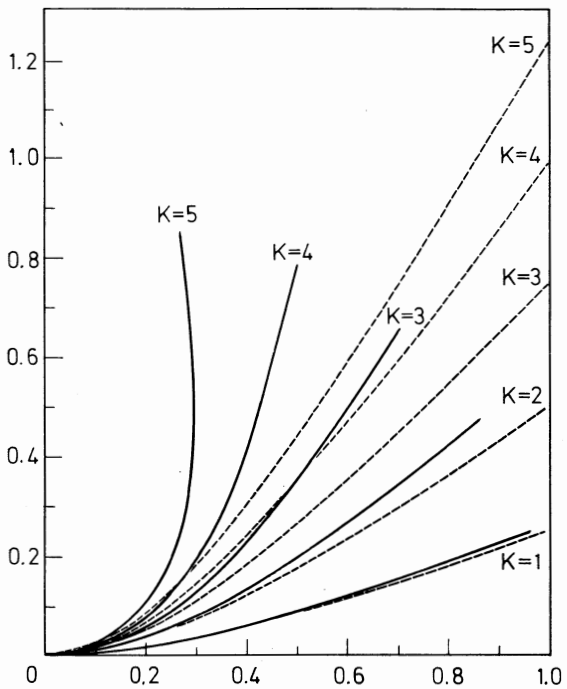


Fig. 106. Forma libre de una banda tal que toma forma rectilínea al aplicarse una presión uniforme dada. (Las líneas a trazos muestran los resultados según la teoría linealizada, mientras que las líneas gruesas son las formas verdaderas. K es el factor adimensional de carga:

$$K = \frac{\frac{1}{2} p L^3}{EI} .)$$

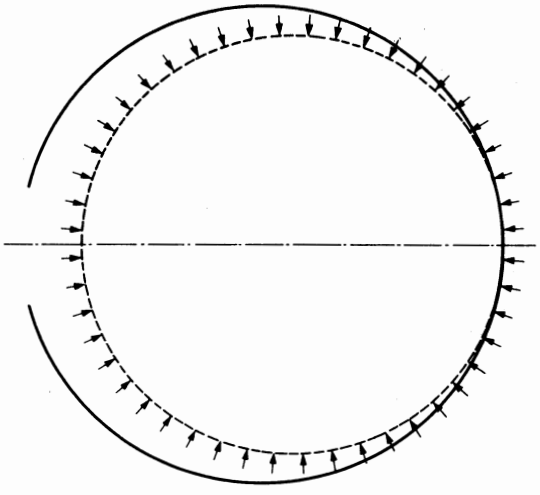


Fig. 107. El problema del aro de pistón. (La línea a trazos es la forma deseada bajo carga, mientras que la línea gruesa es la forma libre a determinar.)

renciales no lineales. En los diez años que han pasado desde que por vez primera hice este comentario, nadie ha intentado llevarlo a sus últimas consecuencias, pero confío que quien lo haga no se véra desilusionado por lo que pudiera encontrar[4]. Vemos aquí no tanto un problema aislado sino todo un programa de investigación sugerido por la lectura de un trabajo de hace 200 años.

4. METODOS DE APROXIMACION A LAS ECUACIONES GENERALES

Los dos casos que he citado apuntan hacia problemas particulares o grupos de problemas. No obstante, el servicio principal del estudio histórico al estudiante actual de mecánica no consiste en dar pistas de esta índole. Recordemos la afirmación de Abel de que había llegado rápidamente a la cima "estudiando a los maestros, no sus discípulos". Entre los maestros que escogió estaba Newton, un autor difícil, y un siglo atrasado por aquel entonces. Stokes y Cauchy vivieron ambos un siglo antes de nuestros propios días. Fue con ellos que comenzó mi propia lectura de los maestros, posteriormente, lamento decirlo, a mis días de estudiante. Estando empleado para trabajar en dinámica de gases, intentaba tomar el primer paso hallando el significado de las ecuaciones de Navier-Stokes. Escribe Lamb [6] que

---

[4] *Nota añadida para la reimpresión.* No resultó fructífera esta idea. Ver § 44, notas de pie de página núms. 1 y 2, de *The Non-Linear Field Theories of Mechanics.*

expresan "la hipótesis más sencilla que podamos postular", que "hay una considerable probabilidad *a priori* de que representará con precisión a los hechos en el caso de movimientos infinitamente pequeños", y que "esta hipótesis ha sido puesta a prueba rigurosa en los experimentos de Poiseuille y otros". En vista de la tradición empírica de los británicos, tomé como broma su referencia a la postulación de hipótesis, ni tampoco podía ver cómo se utilizaba una probabilidad *a priori* para hallar ecuaciones constitutivas para materiales. Puesto que, como había comentado Lamb unas líneas antes, las "derivadas temporales de la distorsión" no son adimensionales, me preguntaba cuál debería tomarse como patrón con el fin de decidir cuándo son "pequeñas" dichas derivadas temporales. No pude encontrar ningún libro de texto que dijese nada acerca de esto. Cuando recurrí a algunos eminentes colegas ya establecidos, me contestaron desdeñosamente que todo el mundo sabía que aquellas ecuaciones se habían establecido experimentalmente. Me picó tanto la curiosidad con respecto a experimentos que pudiesen establecer una relación funcional lineal e isótropo entre dos tensores que busqué las referencias que daba Lamb para las derivaciones de Navier, Poisson y Stokes, y para los experimentos de Poiseuille y otros. En la lectura de la obra de Navier y Poisson tuve mi primera experiencia con lo que desde entonces he podido apreciar como un fenómeno frecuente en la historia de la ciencia:

$$\text{Falsedad} \Rightarrow \text{Verdad}$$

Tanto Navier como Poisson partieron de hipótesis atómicas distintas de todas las que se mencionaron en el curso de física de primer año del Cal Tech de mis tiempos. A pesar de una amarga y nunca acabada disputa acerca de las diferencias entre sus respectivos átomos imaginarios, discusión que fue, acaso, un prototipo para las actuales conferencias sobre dislocaciones, ambos obtuvieron el resultado posteriormente aceptado. La memoria de Stokes [7] fue un haz iluminador. El nos cuenta exactamente cómo halló sus ecuaciones: "Estando reflexionando sobre los principios según los cuales debería calcularse el movimiento de un fluido..., ello me condujo a construir la teoría..." Sobre la base de una afirmación hipotética tras otra, abiertamente expuestas ante el lector, concluyó Stokes, "Supondré válido el siguiente principio: –

> "Que la diferencia entre la presión en un plano en una dirección dada que pasa por cualquier punto p de un fluido en movimiento y la presión que existiría en todas las direcciones alrededor de p si el fluido en su entorno estuviera en un estado de equilibrio relativo depende únicamente del movimiento relativo del fluido inmediatamente alrededor de p; y que el movimiento relativo debido a cualquier movimiento de rotación puede eliminarse sin que ello afecte a las diferencias de presión mencionadas arriba."

A continuación siguen páginas enteras de puro análisis cinemático con el fin de proporcionar las herramientas necesarias para poder hacer uso concreto de este principio, y son menester todavía más hipótesis antes de poderse derivar las ecuaciones de Navier-Stokes.

Aquí lo fundamental no es el detalle sino el método entero. Otro pasaje, que se refiere a la elasticidad, reza: "¿Hemos, pues, de suponer que cuando un sólido está ligado, no posee ninguna *tendencia* de liberarse del estado de ligadura, en consecuencia de que sus moléculas *tiendan hacia* nuevas posiciones relativas...? A

mí me parece mucho más natural el suponer *a priori* que debería existir alguna tendencia tal." En la actualidad, tanto por su método como por su estilo, este trabajo sería rechazado por los críticos secretos de cualquiera de las publicaciones de nuestras sociedades científicas. El lenguaje empleado por Stokes es un *inglés* claro y directo. Todavía no se había inventado el "estilo científico" del que actualmente padecemos, con su galimatías de sustantivos amontonados a lo alemán, tambaleándose entre pasivos e impersonales holandeses, con sus comillas, guiones, y paréntesis para hilazar argot callejero con latinajos altisonantes y palabrería publicitaria. Puede que a la moderna modestia oficial el uso del pronombre personal "yo" le sugiera la pontificación de una autoridad ya mayor. De hecho, reflejaba la honradez de un principiante desconocido, de veintiséis años de edad, que estaba *pensando* y no tenía inconveniente en reconocerlo. En la discusión que lleva a las ecuaciones básicas hay varias referencias a la experiencia, pero ninguna a experimento concreto alguno. Como escribiera Osgood [8],

"La mecánica es una ciencia natural y como toda ciencia natural requiere para su comprensión la observación y el conocimiento de un vasto fondo de casos individuales...

"Pero la Mecánica no es un saber empírico en el sentido en que son empíricas la física y la química al tratar de las regiones fronterizas del conocimiento humano de la época... Al igual que las leyes de la Geometría, las leyes de la Mecánica, que son, en la medida de su condición de primeras aproximaciones, las leyes que explican el movimiento de la pelota de golf o del giroscopio o del automóvil que patina, y que hacen posible el cálculo de tablas lunares y la predicción de eclipses, son conocidas, y serán tan nuevas e importantes de aquí a dos mil años como en el pasado reciente de la ciencia cuando aparecieron por vez primera a la luz del día...

"El verdadero laboratorio de mecánica elemental es el mundo en el que han vivido el muchacho y la muchacha. La pelota de tenis, la pelota de golf, la trainera en el río; el automóvil –el viejo Modelo T en su día, y los coches y embarcaciones a motor que construyen y seguirán construyendo los jóvenes–, la imprenta de aficionados; los juegos en los que tiene su parte la mecánica del cuerpo; todo ello proporciona al estudiante con una rica experiencia de laboratorio..."

Daniel Bernoulli dijo lo mismo con más brevedad: "...no existe ninguna filosofía que no se funde en el conocimiento de los fenómenos, pero para poder sacar algún provecho de este conocimiento es absolutamente necesario ser matemático." Y es todavía mejor el lema de Huygens: "A partir de la experiencia y de la razón."

Pero nadie aprende nada de los lemas. Un lema es un resumen de lo que uno ha aprendido, o intentado aprender. La verdadera escuela del método científico es el estudio de los maestros.

Contrariamente a lo que creen muchos científicos, los historiadores de la ciencia no se interesan apenas por establecer prioridades. Sin embargo, cuando se atrasa o adelanta a una prioridad en un siglo, queda traspasado a un ambiente científico distinto, y podemos estar seguros de que existirá una diferencia en método. Es costumbre, por ejemplo, considerar a Young como un científico mayormente empírico y no matemático, y es natural, pues, concebir al "módulo de Young" como el descubrimiento de un experimentalista. En realidad, el llamado "módulo de Young" lo había inventado Euler casi cien años antes, cuando era un muchacho de diecinueve años estudiando matemáticas bajo la dirección de Juan Bernoulli. Lo había inventado por una razón bien concreta: intentaba Euler obtener la ley de Jaime Bernoulli para el pandeo de una viga a partir de la ley de extensión de Hooke para fibras longitudinales. Este es un problema matemático definido, la solución del cual podemos leer en cualquier libro elemental sobre resistencia de materiales.

Fig. 108. George Gabriel Stokes (1819-1903), de una fotografía tomada en 1857

Para poder resolver este problema, como Euler de hecho lo hizo, es *matemáticamente necesario* introducir una medida de la elasticidad que represente una propiedad del material, independiente del tamaño de la muestra. Cuando nos aproximamos a los detalles, encontramos que, a pesar de todas sus observaciones acerca de "conocimientos útiles", Young metió la pata al definir el módulo como la razón de fuerza a deformación, al igual que como lo había hecho casi todo el mundo el siglo anterior, con lo que obtuvo una magnitud que varía de una muestra a otra del mismo material. Young conocía la obra de Euler, mas no siempre pudo entenderla. Por otra parte, el ambiente en que vivía no era conducente a la producción de nada que fuera de gran originalidad, ni siquiera a la comprensión de los sólidos resultados matemáticos que habían provenido con anterioridad de un medio más racional e imaginativo. Fue el ingeniero Robison, autor favorito de Young, quien hablando de la teoría de pandeo de Euler, la calificó de "seca disquisición matemática, basándose en supuestos que (seamos amables) son en extremo gratuitos..." y "evidencias de este extravagante modo de proceder..."

La lectura del trabajo original de Stokes sobre viscosidad y de las investigaciones de Cauchy sobre sólidos y fluidos ayudaron a recrear un ambiente en el que de nuevo era posible *pensar* con claridad acerca de la naturaleza de los materiales tal y como nos los encontramos en la vida cotidiana, el verdadero laboratorio de la mecánica. Digo "recrear" porque todos nos habíamos criado en una época cuando la matemática "aplicada" era un sinónimo para el arte de quitar términos apropiados de ecuaciones ya hace mucho conocidas pero consideradas demasiado difíciles para resolver. En este período, la mecánica racional se redujo hasta casi nada debido a su abandono, de una parte, por los matemáticos puros, quienes la identificaban con el problema, excesivamente vulgar, de integrar un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que toman su nombre de Hamilton, y de otra parte, por los físicos, los cuales rechazaban como "mera matemática", esto es, física mala, todo razonamiento que no fuera tan oscuro que no pudiese seguirse por pasos lógicos. En otra parte [9] he descrito el desarrollo de las tempranas teorías de viscosidad no lineal desde 1945 en adelante. Más recientemente, han llegado a un cierto grado de complitud en cierta dirección debido al desarrollo teórico del "fluido simple" de Noll [10], mientras que otro camino lo han abierto los "fluidos anisótropos" de Ericksen [11]. Las consideraciones de estos sabios son muy al estilo de Stokes, aunque, claro está, gozando de la ventaja de los frutos de un siglo de experiencia, descansan sobre una base física más amplia y utilizan una matemática tanto más poderosa como breve.

Conviene describir la relación entre estas teorías y los hechos experimentales. Más arriba he comentado acerca de las pretensiones positivas que se habían adelantado en años anteriores a favor de las ecuaciones de Navier-Stokes. La debilidad lógica de las mismas la vio mi antiguo profesor, Bateman [12], que parece haber sido el único experto en mecánica del período entre las dos guerras mundiales que combinase un conocimiento de la literatura con una cierta facultad crítica. Observó que las supuestas pruebas confirmarían de igual manera cualquier otra teoría que llevase a las mismas relaciones entre parámetros adimensionales en los flujos particulares considerados. En otras palabras, se refería a la posibilidad de que

$$\text{Falsedad} \Rightarrow \text{Verdad},$$

lo que rara vez se admite entre empiricistas. Cuando un experimento confirma una fórmula derivada de una teoría, no confirma las hipótesis de la teoría; lo único que

hace es no contradecirlas. Los hechos experimentales son en verdad hechos y como tales, incontrovertibles, pero de por sí no ofrecen una verificación de una teoría a menos de que la contradigan. La experimentación nos enseña qué es lo que hay que rechazar. Podemos aceptar, provisionalmente, sólo aquellas teorías que hasta la fecha no se hayan mostrado en desacuerdo con los hechos experimentales. Para que una prueba pueda tener un resultado definitivo, hemos de disponer de por lo menos dos teorías que lleven a resultados *diferentes* para el experimento en cuestión. Luego, el experimento ha de contradecir al menos una de las dos teorías, permitiéndonos así rechazar al menos un conjunto de hipótesis. Es decir, lo que se requiere no es un experimento cualquiera sino un *experimento discriminativo.* Por otra parte, no podemos saber si un experimento es discriminativo o no salvo por un conocimiento teórico previo. La teoría juega un papel caracterizador e inamovible en la verificación de teorías. Por ejemplo, si los esfuerzos viscosos de hecho dependen de las derivadas espaciales superiores del campo de velocidades, no se verá afectada la fórmula de efusión de Hagen-Poiseuille puesto que ésta atañe a un flujo particular en el que dichas derivadas son todas cero. Pero incluso si no se concede ningún efecto a las derivadas superiores, el hecho de que la ley de Hagen-Poiseuille se derive de las ecuaciones de Navier-Stokes no posee fuerza lógica alguna para hacernos creer que *no* pudiese proceder también de otras teorías plausibles. De hecho, así ocurre. En viscometría, ha sido solamente desde 1954 que hemos llegado a una situación que nos permitiese ver con claridad los problemas, pues en aquel año obtuvieron Coleman y Noll [13] las soluciones exactas para flujos viscométricos de todos los fluidos simples. Entre sus resultados se incluye una fórmula general y explícita para la efusión $\mathcal{Q}$ en términos de las ecuaciones que definen el fluido. Podemos expresar su fórmula para la efusión como sigue:

$$\mathcal{Q} = \frac{\pi a R^4}{2\mu} \int_0^1 u^3 \zeta\left(\frac{\frac{1}{2} a R \tau}{\mu} u\right) du, \tag{3}$$

donde a es la fuerza motriz, R es el radio del tubo, μ es la viscosidad lineal del fluido, τ es el tiempo natural del fluido, y $\zeta(\ )$ es una función material adimensional de su argumento adimensional. Según las ecuaciones de Navier-Stokes, $\zeta(\ ) = 1$, y entonces (3) da lugar a la famosa ley de la cuarta potencia y al coeficiente numérico $\frac{1}{8}\pi$. Recíprocamente, si $\mathcal{Q}$ varía según R^4, podemos concluir que $\zeta(\ ) = 1$, pero esta forma de la función de viscosidad de cizalladura no implica la verdad de las ecuaciones de Navier-Stokes. De hecho, los efectos típicos de esfuerzo normal de la viscosidad no lineal pueden estar presentes sin que ello afecte la forma de $\zeta(\ )$. Así pues, de acuerdo con lo que había sospechado Bateman desde un punto de vista puramente lógico, la verificación de la fórmula de Hagen-Poiseuille por medidas experimentales está muy lejos de ser suficiente para establecer la verdad física de las ecuaciones de Navier-Stokes.

Entre los decanos de los escritores sobre mecánica, es Cauchy quien nos ofrece el mayor número de ideas valiosas que hasta la fecha no han sido plenamente explotadas. Se encuentran entre sus obras centenares de páginas que tratan de sistemas dinámicos o materiales muy generales y obtienen principios matemáticos que posibilitan el comienzo de su estudio, pero el propio Cauchy no llegó muy lejos por los caminos que él había abierto, y tengo mis dudas de que nadie más lo haya hecho desde entonces. En un trabajo [14] publicado en 1954, yo intenté resumir las

teorías que hasta aquella fecha se habían presentado en las que el esfuerzo elástico se consideraba como originándose a partir de incrementos diferenciales en vez de una deformación finita. Ericksen me demostró que mi exposición estaba equivocada, de hecho incompatible con una fórmula de Cauchy que yo había dado en una página anterior tratando de un problema más particular. Al leer el trabajo original de Cauchy que yo había citado sin entenderlo correctamente, Ericksen encontró allí un enunciado bastante claro, si bien particularizado y nada subrayado, del requisito de que las ecuaciones constitutivas sean invariantes bajo movimientos rígidos. Entonces yo recordé haber visto algo de Zaremba (1903) relevante al tema. Estas fuentes históricas y las discusiones y descubrimientos que se basaron en las mismas, dieron lugar primeramente a la teoría de hipoelasticidad [15] y más tarde al bello y comprensivo *principio de indiferencia material* formulado por Noll [16][5] y utilizado, a menudo sin reconocimiento expreso, por diversos autores antes y posteriormente como la herramienta principal en la reducción de las ecuaciones constitutivas de materiales no lineales a formas explícitas y manejables.

5. LOS AXIOMAS SOBRE FUERZAS

Hasta aquí he aducido como ejemplos de materias que se han originado en el estudio de la historia un problema aislado, una clase de problemas, un método y un concepto. Queda por demostrarles a Vds. que mediante el estudio histórico puede cambiarse hasta el propio lenguaje de la mecánica y, en última instancia, puede crearse una nueva ley.

Estamos todos acostumbrados a ver a la mecánica como basada en un concepto primitivo y fundamental de fuerza. La verdad es que no siempre fue así. La palabra "fuerza" es más antigua que todas sus medidas. Desde las primeras investigaciones en dinámica, se asociaron fuerzas y movimientos, pero ¿qué es la fuerza del movimiento? ¿Qué es la medida de la fuerza? El siglo diecisiete vio librarse muchos debates sobre estas cuestiones, debates que resultaban confusos para los partícipes ya que intuían mejor que lo que pudieron especificar los problemas que deseaban resolver. Y actualmente resultan confusos también para el típico lector moderno, puesto que, con su vocabulario ya prejuiciado, ni siquiera se da cuenta de que jamás hubiera algo sobre qué discutir. A los científicos de aquel siglo no se les había enseñado en la escuela que cuando se tiene un problema de mecánica, las "fuerzas" son "dadas", y se parte de ese hecho para plantear el mismo. Cuando ellos observaban un cuerpo que se movía sobre un plano inclinado, o un cuerpo oscilando al extremo de una cuerda, o una peonza girando sobre un punto, o un fluido surcado por la proa de un barco, sabían que se manifestaban "fuerzas", pero ¿cómo se deberían medir esas fuerzas? Una de ellas era la "fuerza de inercia", definida por Kepler y mencionada por Euler, D'Alembert y muchos otros. Esta era equivalente a la palabra moderna "inercia", una propiedad de la materia, pero en la literatura temprana representaba un ejemplo de una "fuerza", de modo análogo a como actúa la expresión "fuerza de la costumbre" en el habla común de hoy. Durante largo tiempo se

---

[5] No quiero dar la impresión de que todos los demás que contribuyeron al enunciado y elaboración de estas ideas desde 1950 en adelante fueran influidos por el estudio histórico. No es mi propósito describir en esta conferencia la historia de la viscosidad no lineal ni de los desarrollos recientes en la mecánica, sino destacar casos particulares en los que sí ayudó el estudio de la vieja literatura en las investigaciones actuales.

hacían esfuerzos por *definir* fuerza en términos del movimiento: el peso multiplicado por la velocidad, el peso multiplicado por la distancia recorrida, la velocidad multiplicada por la distancia recorrida, etc. No se veía claramente que había que introducir *algo nuevo,* aparte de las magnitudes cinemáticas, para que resultase una mecánica viable y útil. La contribución principal de Newton fue, acaso, la de un concepto *a priori* de fuerza, aunque en sus escritos queda éste más bien ilustrado que presentado, explicado o defendido explícitamente, e inicialmente, sólo sus propios discípulos británicos llegaron a convertirse al punto de vista suyo. Más de medio siglo después de la publicación de los *Principia,* al exponer D'Alembert su opinión de que lo que llamamos fuerza es tan sólo una manifestación del movimiento, describía a las fuerzas newtonianas como "entes oscuros y metafísicos, únicamente capaces de extender las tinieblas sobre una ciencia de por sí clara". Fue debido a las docenas de ejemplos trabajados y resueltos por Daniel Bernoulli y Euler que gradualmente llegó a aceptarse lo fructífero que era tomar a las fuerzas como magnitudes dadas *a priori.* Hoy en día, por consentimiento común, los científicos y no-científicos rara vez comunican algo concreto entre sí; el científico que utilice ante músicos o poetas la palabra "fuerza" en su sentido newtoniano en seguida se dará cuenta de que cesa el entendimiento, puesto que para ellos todavía "fuerza" posee únicamente sus sentidos no newtonianos.

Así como hay pocos científicos que saben que efectivamente existieron concepciones no newtonianas de fuerza, son aún menos los capaces de contarnos qué es una fuerza newtoniana. Si preguntamos a un experto moderno[6], nos dirá: "¿Fuerza? Pues todo el mundo sabe intuitivamente lo que es una fuerza. Todos hemos experimentado empujones y tirones, y vemos experimentos en los que se aplican fuerzas. En la teoría, representamos a las fuerzas como vectores, y les asignamos las dimensiones de masa por aceleración para poderlas introducir en la segunda ley de Newton." Ciertamente, este modo de expresarse no habría impresionado a Leibniz ni D'Alembert. Hoy se acepta por la única razón de que *estamos todos acostumbrados a él.* En realidad, ni siquiera lo escuchamos. Cada uno mentalmente posee una asociación adicional con el concepto de fuerza, no expresada en ningún libro. Cuando preguntamos a un matemático qué es un número real, no murmura: "Pues todos conocemos a los números reales de rellenar nuestros formularios de impuestos sobre la renta y de resolver ecuaciones; pertenecen a un campo ordenado, sabe Vd., y los utilizamos cuando estudiamos el cálculo." Al contrario, contesta que un número real es un *objeto no definido* o *primitivo,* descrito únicamente por un conjunto determinado de *axiomas,* los cuales puede enunciar con precisión y sin vacilaciones[7]. Ahora bien, las fuerzas, a su vez, también son objetos no definidos; son medidas vectoriales, pero al decir esto no los caracteriza más que lo que caracterizaría a los números

---

[6] O bien, si se prefiere, un libro de texto moderno. Ver por ejemplo, págs. 15-16 de *Principles of Mechanics* de Synge & Griffith, 2.ª ed., McGraw-Hill, 1949. Synge & Gryffith multiplican la confusión al decidirse finalmente a medir fuerzas mediante "cierta extensión patrón en cierto muelle patrón". Afortunadamente, su libro no contiene ninguna teoría de elasticidad. Así eluden el apuro de tener que decirnos qué es lo que quieren decir por "fuerza" cuando se enuncia la ley de Hooke con el fin de explicar su "muelle patrón".

[7] Es claro que existen alternativas: El matemático puede optar por definir a los números reales en términos de los racionales, los racionales en términos de los enteros, y los enteros en términos de conjuntos. La cuestión estriba en que por *alguna parte* comienza con objetos no definidos y axiomas enunciados con precisión; no intenta levantarse por los cordones de las botas, inferiendo sus definiciones de los resultados de la teoría que está construyendo, al modo que muchos expertos en mecánica procuran sacar una definición de fuerza de alguna esquina del edificio entero de la mecánica, cual es la teoría de los muelles lineales.

reales el afirmar que forman un campo algebraico ordenado. (De hecho, un sistema de fuerzas implica dos medidas vectoriales: una que da las fuerzas ejercidas sobre un cuerpo dado por todos los cuerpos exteriores al mismo, y otra que da las fuerzas ejercidas sobre los subcuerpos de un cuerpo dado por un cuerpo exterior aislado, y han de ser compatibles entre sí estas dos medidas.) Durante alrededor de un siglo hemos sabido que hay muchos tipos de campos algebraicos ordenados, pero que los números reales satisfacen un axioma de continuidad. Además, cualquier campo que satisface dicho axioma es indistinguible de los números reales. En la actualidad, con respecto a las fuerzas, hemos llegado aproximadamente a la situación en que estábamos hace cien años con respecto a los números. Al parecer es sólo desde hace poco que nadie haya sentido la necesidad [17] de definir con precisión a las fuerzas haciendo constatar *todos* los axiomas que satisfacen, y de hecho, permanece sin resolver la cuestión de si los axiomas hasta la fecha propuestos son de verdad suficientes para caracterizar a las fuerzas como distintas de otros tipos más generales de vectores.

6. Paralelismos del siglo diecisiete con la oscuridad de la termodinamica y la termostatica

El largo, lento y todavía no del todo acabado desarrollo del concepto de fuerza nos ayuda a comprender las dificultades que se dan en otra disciplina, a saber, la termodinámica. Así como la mecánica es la ciencia de los movimientos y las fuerzas, la termodinámica es la ciencia de fuerzas y entropía. ¿Qué es la entropía? Durante un siglo se han estado quebrantando cabezas con el intento de definir entropía en términos de otras cosas. Yo les digo a Vds. que la entropía, al igual que la fuerza es un objeto no definido y si se empeñan en intentar definirla, sufrirán el mismo destino que los definidores de fuerza de los siglos diecisiete y dieciocho: O bien obtendrán algo excesivamente particular, o bien acabarán dando vueltas sin cesar. Parece que Carnot se dio cuenta de esto cuando, en apariencia rechazando la noción de que el calor (chaleur) es una sustancia, propuso una teoría según la que el calentamiento o enfriamiento tiene lugar según que aumente o disminuya cierta sustancia nueva llamada el calórico (calorique). En algunos casos este calórico puede tomarse como la moderna entropía. Análogamente al hecho de que fuerza pueda definirse cinemáticamente en ciertos sistemas comunes pero particulares, cual es el péndulo, la entropía puede definirse, y de hecho se define, térmicamente para ciertos sistemas particulares, tales como un gas perfecto. Y al igual que la imposibilidad de poder medir directamente a una fuerza –pues todas las medidas de fuerza presuponen alguna ecuación constitutiva mecánica particular tal como la del cuerpo rígido, la del resorte lineal, o la del campo gravitatorio– asimismo, la entropía tampoco puede medirse salvo de modo indirecto mediante el uso de ecuaciones constitutivas térmicas particulares. No obstante, aunque es cierto que jamás podemos definir a la entropía excepto en casos donde no la necesitamos, y que no podemos medirla directamente, con el tiempo, podemos acostumbrarnos a ella como lo hemos hecho con el concepto *a priori* de fuerza, a pesar de la oposición de algunos de los mejores científicos de todos los tiempos. Pero el hecho es que todavía no estamos lo suficientemente acostumbrados a la entropía como para enunciar, con alguna medida de acuerdo mutuo, cuáles son los axiomas que satisface.

Ahora puede trazarse un segundo paralelismo con la mecánica del siglo dieci-

siete. Acaso piensan Vds. que son adecuadas las definiciones y descripciones de entropía dadas en los libros de texto. La verdad es que los textos más decanos tratan exclusivamente de la *termostática;* la cuestión de cuán bien lo hacen es cosa de gustos, aunque admito la evidencia de que muchas personas aceptan lo que se dice, lo repiten sin tropiezos, y lo utilizan para diseñar buenas máquinas de vapor. En el siglo diecisiete la estática era una disciplina bien desarrollada y se aplicaba de una manera aceptable entonces a muchas personas en múltiples casos donde cualquier ingeniero actual requeriría leyes de movimiento, desconocidas en aquel entonces. Como ejemplo, podemos citar al libro de Borelli, *Acerca del Movimiento de los Animales* (1685), donde el paralelogramo de fuerzas parece ser la única base cuantitativa para dos tomos sobre la materia nombrada, y donde, a pesar del título, en vano buscamos encontrar leyes del movimiento. No quiero en absoluto ridiculizar el libro; es una obra no sólo en verdad científica sino ingeniosa en muchos lugares. Lo aduzco como ejemplo para demostrar que trabajos tanto inteligentes como extensos pueden realizarse sobre unos cimientos inseguros, y que la existencia de literatura seria en un dominio, llevando a alguna medida de éxito, no implica necesariamente que la estructura de la misma esté firme.

Las leyes del movimiento no nacen saltando al estilo de Minerva de la cabeza de nadie, llámese Newton, Galileo, Leonardo, o Nostradamus. Las propiedades del movimiento uniformemente acelerado, obtenidas por los estudiosos del Merton College [18] entre 1328 y 1350, llegaron a ser ampliamente conocidas a través de los escritos de Galileo, unos 300 años más tarde. A pesar de algunos intentos inciertos de Buridan y Oresme durante el siglo catorce, parece que fue Leonardo el primero en afirmar con bastante claridad que todos los cuerpos poseen una aceleración común y uniforme al caer en un vacío, tanto si se caen libremente como en un movimiento oblicuo [18]; también estas ideas adquirieron amplia difusión mediante la publicación de Galileo un siglo después. A mediados del siglo diecisiete se buscaron leyes del movimiento que fueran más universales. Los dos ejemplos más famosos vienen dados por las soluciones halladas por Huygens a los problemas de caída a lo largo de una cicloide y de oscilación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo. Como principio básico para resolver aquel problema, supuso que las leyes del movimiento uniformemente acelerado son aproximadamente válidas para el movimiento a lo largo de la tangente en cada instante; para resolver éste, supuso que cada corpúsculo tiene una velocidad tal que si se soltara de todos los demás, por sí solo subiría hasta la altura desde la que había caído. Descartes y Leibniz propusieron leyes del movimiento que pueden considerarse como antecesores de los principios de conservación del momento lineal total y de la energía total. El esquema de Newton, mejor conocido hoy día, efectivamente dió normas para resolver muchos más problemas. Ninguno de estos principios es incorrecto, pero al mismo tiempo, ninguno es lo bastante general como para englobar a todos los demás. Llegado el año 1700, con justicia podría afirmarse que multitud de importantes problemas de movimiento particulares habían sido resueltos correctamente, no obstante lo cual la dinámica permanecía siendo mitad arte, mitad ciencia.

Esta es la situación en que actualmente estamos con respecto a la termodinámica. Los procesos térmicos en la naturaleza son tan poco reversibles como estáticos los procesos mecánicos. El esfuerzo por describir los fenómenos térmicos mediante la termostática ha dado lugar a la misma medida de fruto y fracaso que lo que produjeron los intentos de discutir el movimiento en términos de la estática mecánica. Puesto que los físicos decimonónicos daban menos peso a la precisión lógica que sus

predecesores del diecisiete –recordemos que en tiempos de Clausius la matemática y la física ya eran profesiones distintas, habiendo sido por entonces inventadas tanto la "matemática pura" como la "intuición física"–, la termodinámica del siglo diecinueve, si bien en esencia sencilla, es oscura debido a su vaga palabrería, así como es oscura la dinámica del diecisiete debido a la profusión de detalles y demostraciones matemáticas. Los pioneros victorianos crearon una "segunda ley de la termodinámica" en la que se exponen prohibiciones sobre el resultado de un proceso pero que no nos dice nada acerca de cómo ocurre el proceso. Es análoga a la simple afirmación de que una pelota rodando nunca llegará al reposo en la cima de una colina. Esto es cierto y de vez en cuando incluso útil, pero esperamos que la dinámica que nos enseñe no sólo dónde no irá la pelota sino también a dónde irá. En años recientes, de la promoción hecha por una escuela de entusiastas especializados, ha surgido una teoría conocida por el nombre de "termodinámica irreversible", basada, nótese, en una ecuación de producción de entropía[8]. Esta doctrina, en lugar de enfrentarse con el problema de descubrir los verdaderos axiomas físicos que gobiernan la producción de entropía, se refugia de inmediato en la linealización. En cuanto a principios, aunque no en lo que respecta a ingenio matemático, el enfoque nos recuerda a la teoría de Huygens de cuerpos cayéndose a lo largo de una cicloide. En la práctica no resulta tan feliz, pues su principal, si no único, dogma, el aserto de que las matrices de coeficientes son siempre simétricas, no es auto-consistente en los casos típicos de difusión, conducción térmica, difusión térmica, *etc.* [19]. No obstante lo vago e inseguro de sus fundamentos, así como lo dudoso de sus logros concretos, la "termodinámica irreversible" de hoy ha servido para dar a conocer a mucha gente los fenómenos que intenta describir, y para recordarles que las leyes físicas que los gobiernan no son más que parcialmente conocidas. Su contribución puede compararse a la de Descartes a la mecánica pura: él resolvió unos pocos problemas e interesó a gran cantidad de personas, pero la mayor parte de lo que dijo, en el fondo, se redujo a meras palabras.

Acabo de trazar un paralelismo entre las leyes de la entropía actuales y las leyes de la dinámica en el siglo diecisiete. A fines de dicho siglo, Jaime Bernoulli (1685-1703) dió un paso hacia adelante de gran importancia cuando, al percibir la certeza de los resultados de Huygens acerca de la libre rotación de un cuerpo alrededor de un eje fijo a pesar de la inseguridad de las hipótesis de las que éste los había obtenido, comenzó a tientas la formulación de dos nuevos principios dinámicos, los cuales principios, eventualmente resultaron ser válidos para todos los movimientos de todos los cuerpos. Ya largo tiempo después de su muerte, a partir de estos mismos principios evolucionaron las modernas ecuaciones dinámicas para cuerpos rígidos y para otros, más generales materiales de volumen finito. Ahora bien, no es que yo sugiera que el estudio de la mecánica del siglo diecisiete resolverá los problemas de entropía de siglo veinte. Lo que sí quiero sugerir es que una visión de la pasada evolución de la mecánica puede que nos ayude a ver cuál es nuestro deseo para las futuras directrices de la termodinámica. Como dijera Gassend ya hace 300 años, "La Historia es con seguridad la luz de la vida, pues proporciona a la mente un agarradero para aprender del pasado lo que se puede esperar del futuro."

---

[8] En efecto, los autores que trabajan en este campo toman a la entropía como una variable primitiva. Cierto es que, en los textos escritos por ellos, las primeras páginas frecuentemente se dedican a una descripción clásica de la entropía en términos del calor y la temperatura, pero jamás se demuestra que los conceptos y razonamientos utilizados allí sean aplicables a la entropía no uniforme y dependiente del tiempo para los fenómenos irreversibles supuestos más adelante en los mismo textos.

El primer paso a dar es el de aislar la teoría de equilibrios, reorganizarla y presentarla como tal y nada más. Aquí también tenemos un paralelismo con el siglo diecisiete, pues hubo varias formulaciones de la estática en términos de pequeños movimientos. Considérese, por ejemplo, una cadena colgando por sus extremos (fig. 109). Un principio suficiente para determinar la figura de equilibrio consiste en que sea nulo el trabajo realizado cuando se aplique a la cadena un desplazamiento infinitesimal cuasi-estático. Este principio, todavía en uso en ciertos sectores, digo que es *suficiente:* esto es, se obtiene por él la figura de equilibrio correcta. No obstante, da la casualidad de que no es *cierto* el principio, pues si perturbamos el equilibrio de

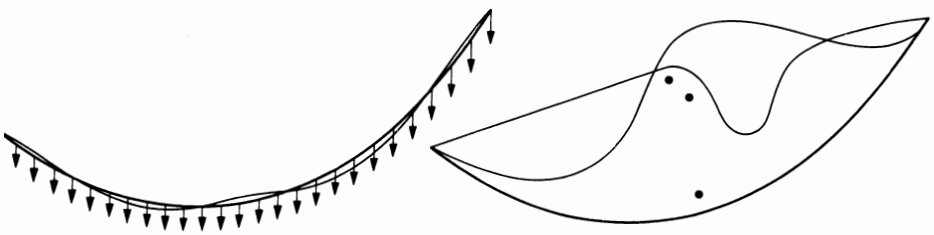


Fig. 109. Equilibrio de la catenaria. A la izquierda: Desplazamientos infinitesimales cuasi-estáticos. A la derecha: Verdadero principio de mínimo para la estática

una cadena perfectamente flexible, no importa cuán poco, de acuerdo con la teoría cinética comúnmente aceptada, habremos de realizar un trabajo puesto que provocaremos un estado de oscilación perpetua, un movimiento perfectamente determinado por las leyes dinámicas. Ya en aquella época se vió que era posible evitar por completo el uso de procesos infinitesimales cuasi-estáticos en mecánica. Para la cadena podemos decir que entre todas las curvas de longitud dada entre los extremos dados, la figura de equilibrio es aquella en la cual queda más bajo el centro de gravedad. Aquí no hay infinitésimos ni extravagantes "procesos"; más bien, tenemos una caracterización de la figura de equilibrio mecánico mediante un verdadero principio de mínimo que la escoge a ella sola entre todas las otras igualmente posibles en la geometría pura. Las leyes del movimiento de una cadena son más complicadas. No obstante, modelos diferentes, tanto aquellos que desprecian el rozamiento como los que lo especifican de diversas maneras, y aquellos que permiten mayor o menor libertad de movimiento, resultan todos compatibles con la misma figura de equilibrio. Excusado es decir que si nuestra preocupación es con el equilibrio, no precisamos de estas teorías dinámicas, pero al menos ya no es necesario mentir sobre el movimiento con el fin de resolver el problema estático.

El paso análogo en termostática lo dio Gibbs. Sin mencionar los procesos, los ciclos, y los motores, formuló éste verdaderos principios de mínimo para el equilibrio termostático de fluidos, mezclas de fluidos, y sólidos elásticos. No siempre resulta esto claro debido al lenguaje que empleaba, y muchas de las presentaciones actuales que pretenden seguir sus métodos, de hecho se aproximan más al triste fárrago de Planck. Hasta hace muy poco, casi el único autor que diera muestras de entender que la teoría clásica es verdadera y exclusivamente estática fue Duhem. Incluso ahora, al estudiante se le enseña todavía un ritual sin sentido involucrando el Primer y Segundo Principios, Procesos Irreversibles y Cuasi-estáticos, Máquinas de Movimiento

Perpetuo, y Máquinas Térmicas Completamente Eficientes. En 1959, Coleman & Noll[9] lograron dar a la teoría gibbsiana del equilibrio una forma consistente y definitiva, estructurada con claridad lógica y precisión matemática, consiguiendo derivar mediante su aplicación importantes resultados nuevos en la teoría de la deformación elástica finita.

Ahora que sabemos, por fin, qué es en realidad la termostática, estamos preparados para buscar la verdadera termodinámica. En la teoría de producción de la entropía disponemos de varios métodos y soluciones particulares si bien aislados o de tipo aproximado, los cuales sólo ligeramente perturban un enfoque esencialmente estático. La mayor parte de ellos, quizás todos, llevan a resultados correctos para las situaciones particulares que conciernen, pero la teoría verdadera, la que es válida para toda clase de irreversibilidades, espera todavía el momento de su creación.

En la tabla siguiente se muestran analogías entre el análisis, la mecánica, y la termodinámica:

Funciones Continuas	Mecánica	Termodinámica
1. Axiomas de espacios vectoriales.	Axiomas de fuerzas	Axiomas de entropía
2. Definición de una función continua	Principios de la mecánica	Principios de la producción de entropía
3. Teoremas sobre todas las funciones continuas	Teoremas sobre todos los sistemas mecánicos	Teoremas sobre todos los sistemas termomecánicos
4. Definiciones de funciones especiales y sus propiedades	Definiciones de sistemas y materiales especiales, y sus propiedades	Definiciones de sistemas y materiales especiales, y sus propiedades

Si yo pudiera ahora enunciar los axiomas y principios de la entropía, habría escogido un tema bien diferente para hoy. Pero dejándonos guiar una vez más por la Historia, podemos observar que, en el camino hacia el fin deseado, el orden histórico ha sido al revés que el orden lógico. La mecánica empezó con casos particulares, y son éstos los que todavía tenemos en termodinámica actualmente. Queremos subir por la columna de la derecha de la tabla. No se puede decir positivamente cómo se ha de

[9] La investigación de Coleman & Noll sobre mezclas de fluidos, mencionada en Seccs. 264-265 de *The Classical Field Theories,* todavía no ha sido publicada. Su teoría del equilibrio de sólidos elásticos viene dada en el artículo "On the thermostatics of continuous media", *Arch. Rational Mech. Anal.* 4, (1959-1960), 97-128 (1959). Este trabajo se dirige específicamente hacia un problema que se originó en el estudio histórico. Habiéndome fijado en el método termodinámico empleado por Duhem para derivar las desigualdades satisfechas por las elasticidades lineales y viscosidades lineales, en una conferencia dada en Berlín en el año 1955 yo había señalado que no se conocían las consideraciones correspondientes a la teoría de la deformación elástica finita. Propuse el problema de hallar las restricciones necesariamente satisfechas por la función deformación-energía de un material elástico; ver "Das ungelöste Hauptproblem der enlichen Elastizitätstheorie", *Z. Angew, Math. Mech.* **36**, 97-103 (1956), traducción inglesa en *Foundations of Elasticity Theory,* N. Y., Gordon & Breach, 1965. Coleman & Noll son los primeros en dar a la formulación gibbsiana de la termostática una precisión matemática y una generalidad suficiente para derivar desigualdades que restringen la respuesta de materiales elásticos en deformación finita. Sus investigaciones ilustran la sabiduría del consejo de Abel de estudiar a los maestros, y no a sus discípulos, con tal de que se escojan a los maestros adecuados (en este caso, Gibbs y Duhem en vez de Clausius, Kelvin y Planck).

hacerlo hasta que efectivamente se haya hecho. No obstante, nuestra experiencia histórica es que la columna del centro no se trepó ni por "inspiración" hacia lo revolucionario ni por complacencia con lo ya sabido. Los grandes principios, universales y definitivos se han obtenido mediante la ponderación, no de experimentos ni de creencias filosóficas, sino de los anteriores *métodos matemáticos para problemas particulares concretos,* incompletos como eran y a veces incluso parcialmente incorrectos. Es decir, mediante la inducción, pero la inducción aplicada a teorías, seguida de refinamientos, consistiendo en la lenta reunión de lo sabido pero desperdigado y el lento descartar de lo accidental en los casos particulares[10].

La verdadera teoría no será lineal. De haber compartido Newton, los Bernoulli, y Euler la moderna pasión por la linealidad por encima incluso de la patria, no dispondríamos hoy de una dinámica. Con anterioridad a la obra más tardía de Lagrange, nadie parece haber visto que los problemas lineales son más fáciles. La teoría general de las oscilaciones pequeñas se descubrió después, y no antes, de las leyes del movimiento finito. Jamás se ha demostrado que la Naturaleza favorezca ninguna forma funcional particular ni ningún tipo especial de magnitud matemática, y los creadores de la mecánica no intentaron imponerle prejuicios tales.

El hecho de que haya numerosas autoridades satisfechas con la termodinámica en su estado actual no tiene por qué desanimarnos. Sería errado pensar que los grandes descubrimientos unificadores y organizativos del siglo dieciocho fueran el resultado de un progreso general y cooperativo, o que fueran aclamados como tales por la ciencia en conjunto cuando se hicieron. Entonces, al igual que ahora, la mayoría de los científicos se contentaban con asegurarse un puesto cómodo perturbando mínimamente (bien hacia dentro o hacia afuera) algún rincón del casco agujereado de la Opinión Autorizada. El esfuerzo cumulativo de los científicos del siglo dieciocho, los académicos y los profesores, fue nulo. Sus minúsculas si bulliciosas vidas no llegaron a ninguna parte; sus vacíos y vórtices y átomos y sutiles fluidos que todo lo explicaban pero nada podían calcular, nos resultan hoy tan curiosos como los flujos, humores, menstruos, sangrías, purgativos y cauterizaciones de los cirujanos contemporáneos suyos, resueltos a torturar o matar a la humanidad como una ofrenda a la Ciencia de la Medicina. Lejos de ver ninguna necesidad de una mecánica más organizada, más matemática, el sabio típico del siglo dieciocho hacía caso omiso o incluso, en países como Inglaterra y Prusia, donde el prejuicio empirista era fuerte, se mofaba de las grandes investigaciones que hoy son todo lo que vemos cuando, mirando hacia atrás, contemplamos su época. Pero se han olvidado hasta los nombres de aquellos hombrecillos influyentes. La mecánica matemática organizada que todos aprendemos en nuestros días es la creación, no del Progreso Científico, sino de tan sólo *siete hombres* del siglo dieciocho. Y los lectores capaces de seguir lo que escribieron aquellos hombres no pasaban de ser una minoría del mundo científico de aquel tiempo.

---

[10] *Nota añadida para la reimpresión,* 1967. Un año después de las afirmaciones anteriores se abrió el camino a una termodinámica general mediante una gran memoria de Coleman & Noll: "The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity", *Arch. Rational Mech. Anal.* 13, 167-178 (1963). Claro está que toman a la temperatura y la entropía como conceptos primitivos y no restringen a los procesos por ninguna relación con el equilibrio. A partir de este trabajo suyo, Coleman, A. E. Green, Gurtin, Mizel y otros han creado una teoría general con múltiples aplicaciones.

En nuestros días, se pone de manifiesto la existencia de una minoría insatisfecha a través de una producción constante si bien cuantitativamente pequeña de literatura[11] preocupada con el intento de volver a formular a la termodinámica o al menos de explicarla de una manera nueva. Los autores de esta literatura sienten lo que está mal, y cada uno de ellos piensa que ha logrado hacer adelantos, pero ninguno de los otros acepta lo que ha hecho. Un crítico reciente [20] ha escrito de su formación en "intensa disciplina termodinámica en su... propia ciudadela", que "Lejos de ser la roca firme de precisión y exposición lúcida esperada, encontró la teoría termodinámica una lúgubre marisma de metafísica dudosa, arbitraje obligado y compromiso expeditivo." Lo que él a continuación desarrolla como sustitutivo es tan sólo una perturbación menor del tradicional ir tropezando por una ciénaga sin caminos. No basta, pues, observar que el queso está ensuciado; se han de encontrar y tapar los agujeros de las ratas antes de poder poner en regla la casa.

La termodinámica verdadera no puede esperar aplausos tan universales como los que reciben una nueva partícula elemental o un viaje a Marte, ni pueden sus descubridores esperar ser galardonados con el Premio Nobel ni siquiera con su elección a la mediocridad eminente de una academia. La teoría matemática que hoy denominamos "mecánica clásica" tuvo que vencer la oposición no sólo de la mayoría reinante de importantes don nadies durante la Ilustración, sino también de varios grandes matemáticos: Huygens lamentó el uso del cálculo, y Daniel Bernoulli rechazó las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, considerándolas parte de la abstracta matemática pura. La termodinámica verdadera expresará las rémoras del pasado sobre el presente. Naturalmente, dichas rémoras dependerán de cuál ha sido el pasado. Por tanto, el lenguaje natural de la termodinámica viene proporcionado por la teoría apenas iniciada de los funcionales tensoriales. En consecuencia, es probable que tanto aquellos que se contentan con el culto cuasi-estático de ciclos, máquinas que funcionan al revés, y universos aletargados con exceso de entropía, como los entusiastas de la actual llamada termodinámica irreversible, rechacen con desprecio la nueva termodinámica funcional en cuanto, si no antes, que se descubra. No ha cambiado la naturaleza humana desde aquella observación del médico romano Galeno de que "El hecho es que aquellos que están esclavizados por sus sectas no solamente carecen de todo conocimiento cierto, sino que ni siquiera se detienen para aprender. En vez de escuchar, como deberían..., llegan incluso a burlarse..." No obstante, es a la vez evidente que una teoría de la irreversibilidad matemática y físicamente clara y correcta tendrá el mismo valor de aquí a doscientos años como hoy posee la mecánica racional creada y organizada hace dos siglos —al menos, lo tendrá si la física actual permite todavía la existencia de seres racionales en aquella época futura.

RECONOCIMIENTO

Es un placer dar las gracias a los Sres. Coleman, Ericksen, Noll, Serrin y Toupin por sus críticas del primer y segundo borradores de esta conferencia. La investigación aquí descrita fue sostenida en parte por una ayuda de la U. S. National Science Foundation.

---

[11] Se cita parte de esta literatura en § 245 de *The Classical Field Theories*, donde se da también una crítica más minuciosa.

REFERENCIAS

1. Cooper, L., *Aristotle, Galileo, and the Leaning Tower of Pisa,* Ithaca, Cornell University Press, 1935.
2. Mersenne, M., *Harmonie Universelle,* París, 1636, pág. 112.
3. Keller, J., "The shape of the strongest column", *Arch. Rational Mech. Anal.* **5**, 275-285 (1960).
4. Truesdell, C., "A new chapter in the theory of the elastica", *Proc. 1st Midwest. Conf. Solid Mech.* (1953), 1954, págs. 52-55.
5. Truesdell, C., "Exact theory of self-expanding piston rings", *Ing.-Arch.* **30**, 77-87 (1961).
6. Lamb, H., *Hydrodynamics,* 2nd ed., Cambridge, 1895, y ediciones posteriores, ver Secc. 326.
7. Stokes, G. G., "On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids", *Trans. Cambr. Phil. Soc.* 8 (1844/9), 287-319 (1845) = *Papers 1,* 75-129; ver Seccs. 1-5, 19.
8. Osgood, W. F., *Mechanics,* New York, MacMillan, 1937, págs. v-vi.
9. Truesdell, C., "Experience, theory and experiment", *Proc. 6th Hydraulics Conf., Iowa State University,* 1956, págs. 3-18.
10. Noll, W., "A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media", *Arch. Rational Mech. Anal.* **2** (1958/9), 197-226 (1958), Secc. 21 reimpresa en *The Rational Mechanics of Materials,* Gordon & Breach, 1965, págs. 336-367, y en *Continuum Theory of Inhomogeneities in Simple Bodies,* Springer, 1968.
11. Ericksen, J. L., "Anisotropic fluids", *Arch. Rational Mech. Anal.* **4**, 231-237 (1960), y publicaciones posteriores. Reimpreso en *The Rational Mechanics of Materials,* Gordon & Breach, 1965, págs. 407-414.
12. *Report of the Committee on Hydrodynamics,* Nat. Res. Council, 1932. Secc. 1.7. del Cap.I de la Parte II. (Este volumen colectivo viene referenciado por los bibliotecarios bajo el nombre del autor de sus primeras páginas, H. L. Dryden.)
13. Coleman, B. D., & W. Noll, "On certain steady flows of general fluids", *Arch. Rational Mech. Anal.,* **3**, 289-303 (1959). Reimpreso en *The Rational Mechanics of Materials,* Gordon & Breach, 1965, págs. 368-383.
14. Truesdell, C., "The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics", *J. Rational Mech. Anal.,* **1**, 125-300 (1952), Seccs. 55-56. Esta referencia y la siguiente se han reunido en una reimpresión corregida publicada por Gordon & Breach, 1966.
15. Truesdell, C., "Corrections and additions to the mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics", *J. Rational Mech. Anal.,* **2**, 593-616 (1953), Seccs. 55 bis y 56, y publicaciones posteriores.
16. "Principle of Isotropy of Space", Secc. 4 de W. Noll, "On the continuity of the solid and fluid states", *J. Rational Mech. Anal.* **4**, 3-18 (1955), y publicaciones posteriores. La referencia citada se ha vuelto a imprimir en *The Rational Mechanics of Materials,* Gordon & Breach, 1965, págs. 64-81.
17. Noll, W., "The foundations of classical mechanics in the light of recent advances in continuum mechanics", *The Axiomatic Method, with Special Reference to Geometry and Physics* (1957), North Holland Co., Amsterdam, 1959, págs. 266-281.
18. Clagett, M., *The Science of Mechanics in the Middle Ages,* University of Wisconsin Press, Madison, 1959, Caps. 4-5.
19. Coleman, B. D., & C. Truesdell, "On the reciprocal relations of Osager", *J. Chem. Phys.* **33**, 28-31 (1960).
20. Svantesson, Sven, *Foundations of Thermodynamics with Antitheses and Disputation,* Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1958.

REFERENCIAS GENERALES PARA LECTURA ADICIONAL

Ensayos cortos o repasos

21. Cohen, I. Bernard, "A sense of history in science", *Am. J. Phys.* **6**, 343-359 (1950).
22. Truesdell, C., "The rational mechanics of materials – Past, present, future", *App. Mech. Rev.* **12**, 75-80 (1959). Reimpresión corregida en *Applied Mechanics Surveys,* Washington, Spartan Books, 1966.

23. Capítulo II de este volumen.
24. Truesdell, C., "Outline of the history of flexible or elastic bodies to 1788", *J. Acoust. Soc. Amer.* **32**, 1647-1656 (1960).
25. Capítulo IV de este volumen.
26. Capítulo V de este volumen.

Tratados

27. Dugas, R., *La Mécanique au 17me siècle,* Neuchâtel, Grifon, 1954.
28. Truesdell, C., "Rational fluid mechanics, 1687-1765", *L. Euleri Opera Omnia* (2) **12**, IX-CXXV (1954).
29. Truesdell, C., "I. The first three sections of Euler's treatise on fluid mechanics (1766); II. The theory of aerial sound, 1687-1788; III. Rational fluid mechanics, 1765-1788", *L. Euleri Opera Omnia* (2) **13**, VII-CXVIII (1956).
30. Truesdell, C., "The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies, 1638-1788", *L. Euleri Opera Omnia* (2) 11_2, 435 págs. (1960).

NOTA BIBLIOGRAFICA

Esta conferencia se presentó en 1962 en el Fourth U. S. National Congress of Applied Mechanics en Berkeley, California, y se publicó en los *Proceedings* del mismo, págs. 35-45. Durante el mismo año también se leyó en Aberdeen Proving Ground en el Armament Research Establishment de Fort Halstead, en las Universidades de Manchester, Nottingham, Newcastle upon Tyne, Stanford, e Illinois, en el National Bureau of Standards, Washington, y finalmente, en una reunión de la sociedad de Sigma Xi en el Illinois Institute of Technology.

Agradezco a la American Society of Mechanical Engineers por su permiso de reimpresión de la misma en este volumen.

VIII. AVANCES RECIENTES EN MECANICA RACIONAL (1956)

1. ¿QUE ES LA MECANICA RACIONAL?

Comienzo respondiendo a la pregunta que la mayoría de Vds. se habrán hecho al leer el título: ¿Qué es la mecánica racional? Es, en efecto, difícil definir la mecánica racional, pero no más que para definir a la química, la física o la matemática. Sin embargo, de un químico que se presentara ante Vds., no se esperaría que empezase con una definición de la química. La razón por la que la mayoría de Vds. desean que defina la mecánica racional es que, en los Estados Unidos al menos, no es una ciencia reconocida. Es más, hay quienes no creen siquiera en su existencia[1].

En primer lugar, *la mecánica racional es una parte de la matemática*[2]. Es una ciencia matemática, y en su relación a la experiencia, la intuición, la abstracción y la vida cotidiana, no difiere en esencia de otras ramas de la matemática. Ante el público presente, estoy seguro, la propia matemática no precisa de defensa alguna. Es innecesario persuadirles a Vds. que la matemática se esfuerza por ser física o ingeniería. Tampoco debería ser necesario señalar que la matemática, por muy abstracta o muy precisa que sea, es una ciencia de la *experiencia,* pues no se limita ésta a los torpes sentidos: La mente humana también es capaz de tener experiencias, y no hemos de ser tan ingenuos como para ver en un osciloscopio un instrumento más preciso que el cerebro del hombre.

Es un hecho obvio el que la mecánica racional se desarrolló a partir de la mecánica práctica y colaboró con ella, aunque no siempre de buen talante, para producir la mecánica aplicada y la ingeniería mecánica. Al escribir el primer tratado de mecánica racional, Newton[3] estableció su patrón de rigor matemático como precisamente aquel de la geometría. No siempre se ha mantenido esta norma, pero en la actualidad tanto como en 1687, sigue siendo el ideal. La comparación que hizo Newton con la geometría es ilustrativo, pues también la geometría se desenvolvió a partir de la experiencia física. A aquellos que se mofan de la geometría por

---

[1] Véanse los cuatro tomos de artículos reimpresos, *Continuum Mechanics* I-IV, Gordon & Breach, Nueva York, 1965-1966, y los dos artículos en el *Handbuch der Physik,* Tomos III/1 (1960) y III/3 (1965): C. Truesdell & R. A. Toupin, *The Classical Field Theories,* y C. Truesdell & W. Noll, *The Non-linear Field Theories of Mechanics.* Véanse también las tres introducciones mías a *L. Euleri Opera Omnia* y el libro de R. Dugas, *La Mécanique au XVIIme Siècle,* Griffon, Neuchâtel, 1954.

[2] En relación con este párrafo, véanse mis artículos: "Experience, theory, and experiment", *Proc. 6th Hydraulics Conference 1955, Bull. 36, State Univ. Iowa Studies in Engr.,* 3-18 (1956), y "The modern spirit in applied mathematics", *I. C. S. U. Review of World Science* 6, 195-205 (1964).

[3] I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica,* Londres, 1687; 2.ª ed., Cambridge, 1713; 3.ª ed., Londres, 1726. La única traducción disponible en inglés no es de fiar, especialmente en la reimpresión supuestamente modernizada. Algunos de los pasajes relevantes, nuevamente traducidos, se citan en el Ensayo III, arriba. Una nueva edición del *Principia,* comparando los tres textos originales y, se supone, proporcionando una traducción correcta, ha sido emprendido por I. B. Cohen y el lamentado A. Koyrê; se espera con impaciencia su aparición.

sus cálculos precisos, siendo así que toda medida es susceptible de error, durante milenios ha replicado el geómetra: la Geometría es *mental,* no *instrumental.* Siempre ha habido escépticos entre nosotros y aún los sigue habiendo; no obstante, ante los científicos, el valor práctico y físico último de la geometría no precisa de defensa alguna. Por otra parte, nadie que haya conocido un geómetra necesita que se le recuerde que la utilidad práctica y física rara vez ha proporcionado o suprimido una sola ecuación en el progreso de la investigación geométrica.

La analogía a la geometría es buena. El que la mecánica racional no sólo hable de espacio y tiempo sino también de masa, fuerza y energía no lo hace menos precisa. Dado que trata un número mayor de conceptos físicos que lo que la geometría, puede esperarse que sus aplicaciones a problemas físicos sean más frecuentes y de mayor alcance, pero no constituyen éstas su objetivo.

Pero, ¿no trata la mecánica racional de cantidades de la experiencia física? En efecto, pero también lo hace la geometría, pues longitudes, superficies y volúmenes igualmente se relacionan con la experiencia física. El geómetra puede visualizar una superficie en términos de una tira torcida de papel, como en mecánica podemos imaginarnos una fuerza como un empuje con la mano; pero sean las que sean las motivaciones éstas, los símbolos que aparecen en las ecuaciones de la geometría y la mecánica son cantidades matemáticas definidas con precisión. Un origen radicado en una experiencia más amplia puede hacer más interesante a la mecánica, pero no tiene por qué hacerle menos rigurosa.

¿No podría decirse lo mismo de cualquier parte de la física teórica? En efecto, cualquier disciplina expresada mediante símbolos matemáticos es en última instancia susceptible de poseer una existencia matemática independiente. Hilbert[4], en su famosa relación de problemas que habían de resolverse durante este siglo, incluyó la constitución de un conjunto de axiomas para la física. Mas este problema, como todos aquellos que propuso acerca de la relación entre la matemática y la experiencia física, ha sido desatendido por los matemáticos. Algunas de las partes más decanas de la física ciertamente están bien adelantadas en el camino hacia el tratamiento plenamente matemático, pero caen fuera del alcance de este ensayo.

Finalmente, ¿no implica la aparición de la mecánica racional como una disciplina puramente matemática que tenemos la libertad de inventar nuevas leyes de la mecánica tal y como inventan los geómetras nuevos espacios? De hecho, los geómetras no son tan exacerbadamente especulativos como pudiera parecer; sus invenciones, por lo general, surgen de alguna exigencia de la experiencia, aunque no sea una experiencia explicable en términos de huevos y manzanas. Teorías puramente matemáticas del espacio han tenido una existencia de 2.500 años por lo menos, mientras que en mecánica, aparte de ciertas excepciones, tenemos una tradición de tan sólo cuatrocientos o quinientos años; la mecánica racional de materiales, donde se dan la mayoría de las investigaciones actuales, tiene poco más de 300 años de existencia.

---

[4] D. Hilbert, "Mathematische Probleme", *Nachr, Ges. Wiss. Göttingen* 1900, 253-297. Se ha publicado una traducción inglesa de una versión ampliada en *Bull. Am. Math. Soc.* (2) 8, 437-479 (1902).

Nota añadida para la reimpresión. Sólo se han publicado dos intentos significativos de resolver la parte del sexto problema de Hilbert que concierne a la mecánica: el de Hamel, "Uber die Grundlagen der Mechanik", *Math. Analen* **66,** 350-397 (1908), y el de Noll, mencionado en el Ensayo VII, arriba, y presentado en pleno en los apuntes de sus clases en el Curso del C. I. M. E. sobre *Recente Developments in the Mechanics of Continua* dadas en Bressanone en 1965, Edizioni Cremonese, Roma, 1966, también emitido como informe del Departamento de Matemática del Carnegie Institute of Technology, 1966.

Las propiedades de las leyes mecánicas más inmediatas a nuestra experiencia no están, ni mucho menos, tan bien exploradas como lo son las propiedades del espacio más inmediato a nuestra experiencia. Por otra parte, la mecánica es enormemente más complicada que la geometría. El sistema común de leyes mecánicas sigue ofreciéndonos misterios y desafíos. Y aunque, en efecto, tenemos la libertad de explorar otras leyes mecánicas, no solemos ejercerla más que en la limitada y sobria manera que explicaré más adelante.

El que la mecánica racional sea una ciencia matemática no significa que su norma es una de dificultad matemática. Es cierto que algunas grandes investigaciones en mecánica racional son difíciles e intrincadas, pero es igualmente cierto que otras son sencillas. Se aprecia de modo especial una innovación que sea sencilla y de fácil comprensión. Los problemas vienen planteados por la temática; sean complicados o simples, han de resolverse, y su dificultad matemática es tan incidental como su posible aplicación física. Después de todo, en esto no difiere la mecánica racional de las otras ramas de la matemática, pues solamente el novato toma la complejidad o dificultad que encuentra en una ciencia matemática como una medida de su nivel.

¿Es la mecánica racional una parte de la matemática pura? A la mayoría de los matemáticos de hoy, la denominación matemática pura quiere decir topología, álgebra abstracto, o análisis en espacios abstractos. Ciertamente, la mecánica racional no hace ningún esfuerzo por imitar a estas disciplinas. Mientras que en espíritu se aproxima más a la geometría, sus problemas, sus fines y sus métodos presentan poca semejanza evidente con aquellos de otras partes de la matemática. Pero no se juzga un teorema de topología por su relevancia en la teoría de los números. Es, pues, igualmente absurdo, aunque desgraciadamente no infrecuente, el desaprobar un teorema en mecánica racional cuando no contribuye también a las ramas más populares de la matemática pura.

¿Es la mecánica racional una parte de la matemática aplicada? Desde luego que no. Claro que en algunos casos pueden emplearse técnicas matemáticas conocidas para resolver nuevos problemas en mecánica racional, pero en otros casos hay que inventarse métodos nuevos. Sería tan engañoso pretender que cada logro en mecánica racional haya traído nueva luz a la matemática en conjunto, como pretender lo contrario, que dicha disciplina es un mero reflejo de partes conocidas de la matemáca pura. Es un error plantear la cuestión de la distinción entre matemática pura y aplicada. En realidad, no es el fin de la mecánica racional el producir métodos o resultados que de por sí puedan calificarse de "nuevos" en otras partes de la matemática; tampoco es su fin el evitarlos. Igualmente, no es el objeto de la mecánica racional el producir o evitar producir aplicaciones, sean a la física, la ingeniería, o a otras partes de la matemática.

La mecánica racional es una rama independiente de la matemática. Cuando una investigación en mecánica racional predice un nuevo fenómeno físico o produce un método analítico nuevo, como de vez en cuando sucede, tanto mejor. Pero tales productos secundarios, aun siendo lujos bien agradables, no son esenciales. La mecánica racional, al igual que cualquier otra ciencia diferenciada, tiene sus propios fines, sus propios criterios, y sus propios problemas independientes.

Existe un prejuicio ampliamente difundido al efecto de que ya se han establecido en física las ecuaciones fundamentales que gobiernan los fenómenos físicos y de que, a continuación, es deber del matemático, o del matemático aplicado, el resolverlas. Cuando se impone este punto de vista a la mecánica, nos vemos obligados a concluír que las ecuaciones básicas de la mecánica se encuentran en los libros de

texto de física clásica, y que todo lo que queda por hacer es que los analistas las resuelvan y los ingenieros las apliquen. Esto no deja lugar alguno para la mecánica racional, dado que ésta rara vez se interesa por teoremas de existencia y unicidad ni por cálculos de respuestas numéricas. Dado que ésta es la primera vez que me dirijo a este público, no puedo estar seguro de que todos los físicos se hayan quedado en casa y, por tanto, he de andar con pies de plomo. Puede que sea el ideal la simple división de responsabilidades entre el matemático y el físico indicada arriba, pero es del todo irreal. Será evidente que podamos admitir que los biólogos estudian biología porque lo prefieren a la física; luego, el hecho de que los físicos actualmente estudian física nuclear en vez de mecánica clásica no tiene porqué implicar que ésta sea un campo muerto, sino que puede tener una explicación subjetiva no tan denigrante para aquellas personas que de hecho cultivan la mecánica. En realidad, los matemáticos que actualmente estudian la mecánica han rechazado los esquemas más antiguos y han vuelto a formular la materia; parte de su trabajo ha incluído el descubrimiento de nuevas ecuaciones fundamentales que definen y explican nuevas clases de fenómenos físicos. En segundo lugar, a menudo escuchamos quejas por parte de los físicos en el sentido de que los matemáticos no se dedican a los problemas más apropiados, que, desatendiendo a los que han planteado los físicos, se lanzan por el contrario a perseguir las quimeras de su propia imaginación. Los matemáticos, por su parte, de buen grado se confiesan culpables de esta acusación. Y si ellos han fracasado tan estrepitosamente en su mitad del pacto ideal, sería injusto esperar que se sostuviese plenamente el otro extremo. En tercer lugar, los hechos históricos contradicen este prejuicio: Las grandes conquistas en mecánica racional de hace dos siglos, hoy día empotradas en nuestra formación como "clásicas", fueron logradas por un pequeño grupo de personas que, llamándose a sí mismas "geómetras", buscaban con tanto celo las soluciones matemáticas de sus ecuaciones como los principios mecánicos que encarnan. El que la mecánica tenga su faceta experimental es obvio; sin embargo, los creadores de la mecánica que actualmente aprendemos en los cursos de física resuelta y muy abiertamente se negaron a considerarla una ciencia experimental. De haberse dedicado nuestros antepasados a la mecánica estando dominados por el estilo y el espíritu tan recomendados en la actualidad como quintaesencia del método científico, aquello que llamamos "mecánica clásica" habría permanecido sin descubrir.

¿Por qué, pues, resulta hoy tan desconocida la mecánica racional? El nombre no es nuevo. Desde la generación de Newton hasta tiempos de nuestros abuelos era de uso bastante común. El gran físico americano, Gibbs[5], describió su libro sobre mecánica estadística como una contribución a la mecánica racional. En varios países de Europa, donde se cristalizó antes la tradición académica, cada universidad tiene su cátedra de mecánica racional. El abandono de esta disciplina hay que achacarlo a la moda. Sobre todo en este país, hace unos cincuenta años se desvió la corriente principal de la física hacia estructura de la materia; la de la matemática hacia las colecciones abstractas. Dado que la materia se compone de múltiples pequeñas partículas, es natural esperar que la comprensión de la física de estas partículas llevará a un entendimiento del comportamiento de materiales ordinarios. Y puesto que las colecciones de la experiencia ordinaria son casos muy particulares de las colecciones abstractas encontradas en la matemática de los últimos 50 años, es también natural esperar que la nueva matemática explicará los fenómenos ordinarios. Como es bien

[5] J. W. Gibbs, *Elementary Principles in Stadistical Mechanics,* 1902, reimpreso en el Tomo 2 de los *Collected Papers* de Gibbs.

sabido en la actualidad, ambas esperanzas son ideales, no reales. La física y la matemática de las últimas cinco décadas han llevado a fascinantes desarrollos *propios*, pero no nos han acercado apreciablemente a las soluciones de los problemas fundamentales de la mecánica; por ejemplo, los principios que rigen la ruptura de metales bajo carga o las soluciones de las ecuaciones que describan este fenómeno. Sería un error condenar el último medio siglo por su fracaso ante problemas que en realidad no intentó resolver. No obstante, todavía quedan en pie los problemas básicos de la mecánica y se vuelve a la búsqueda de su solución. Quisiera describirles a ustedes algunos de los brillantes éxitos de la pasada década. Me refiero a ésta en particular pues es corriente que la lista de referencias de un trabajo moderno en mecánica comience con algunos estudios de hace cincuenta años o más para después saltar a los últimos seis u ocho años. Con relativamente poca injusticia, yo podría dar esta misma conferencia como un resumen de progresos en mecánica durante el siglo veinte.

He dicho que la mecánica racional es una rama de la matemática con su propio objetivo, y que este objetivo no se limita ni a los teoremas de existencia típicos de la teoría de ecuaciones diferenciales ni al cálculo de respuestas numéricas para hacer comparaciones con resultados experimentales. Más bien, el objetivo consiste en *entender* a la mecánica. El entendimiento es, después de todo, el objeto de toda rama de la matemática. La medida del entendimiento, en cualquier campo, es en parte de índole estético, y es difícil explicar en términos generales qué es lo que quiere decir un matemático cuando afirma que entiende o no entiende una disciplina dada.

2. Un ejemplo clasico: los teoremas de vorticidad de Helmholtz, Kelvin y Ertel

Después de preliminares, lo mejor es presentar ejemplos. Comencemos con un viejo ejemplo cuyo valor y calidad es incontestable, pues a partir de tal verán ustedes con más facilidad el tipo de resultado que más se aprecia. Ningún ejemplo por sí solo puede ilustrar toda excelencia posible en mecánica racional, no obstante lo cual escogeré una sola muestra clásica antes de pasar a los trabajos mas recientes.

En el movimiento de un fluido, cada pequeña parte del fluido puede considerarse como un cuerpo en movimiento. Tal cuerpo puede o no estar en rotación alrededor de sí mismo. Si está en rotación, gira alrededor de un eje a una velocidad determinada, de modo que se puede representar su rotación o *spin* mediante una flecha. La flecha que apunta a lo largo del eje de rotación y tiene longitud igual a la velocidad angular, es la *vorticidad* (fig. 110). En un movimiento dado de un fluido, dife-

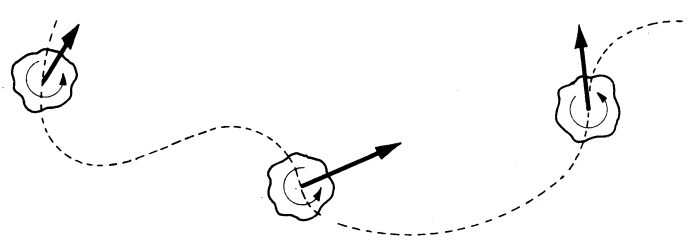


Fig. 110. Spin o "vorticidad" de un elemento de fluido

rentes partículas pueden tener distintas vorticidades, y puede cambiar la vorticidad de una partícula dada a medida que se mueve ésta. Se puede observar la vorticidad sobre la superficie de un fluido mediante el método de seguir el movimiento de un corcho sobre el cual se ha marcado una cruz. Si no giran los brazos de la cruz, la vorticidad es cero; si giran, hay vorticidad (fig. 111). Ahora bien, la teoría de los movimientos de fluidos cuando la vorticidad es cero es de una complejidad matemática mucho menor que la del caso general, cuando giran las partículas. Pero si el caso de no haber *spin* es apropiado para algunas aplicaciones, en particular para olas sobre el agua y para la aeronáutica, para otros casos no sirve. Por ejemplo, sin vorticidad, no habría vientos. Durante un siglo después del descubrimiento de las ecuaciones fundamentales de los fluidos ideales, permaneció en el misterio la naturaleza de los movimientos de giro.

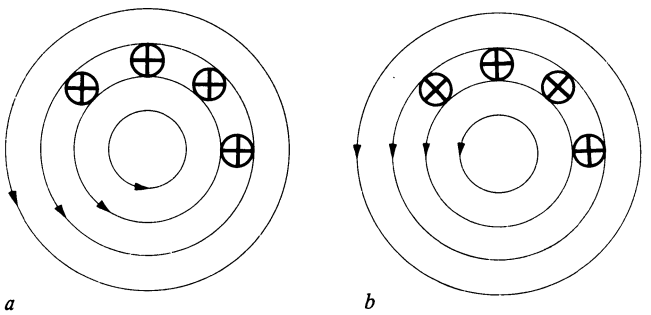


Fig. 111. (a) Vorticidad cero *(b)* Vorticidad distinto de cero

En 1858, un enfoque enteramente nuevo fue concebido por Helmholtz[6]. Se dibuja el vector de vorticidad en cada punto del movimiento de giro. A continuación, se conectan estos vectores mediante curvas. A tales curvas se les llama *líneas de vórtices* (fig. 112). Si dibujamos un circuito cerrado en el fluido, las líneas de vórtices

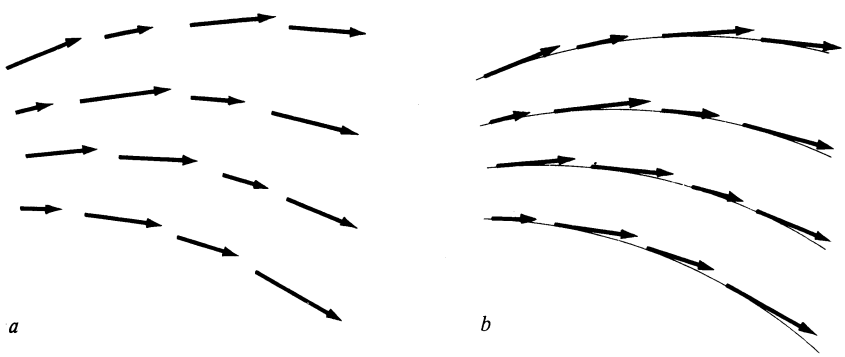


Fig. 112. (a) Campo de vorticidad *(b)* Líneas de vórtices

[6] H. v. Helmholtz, "Uber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen", *J. Reine Angew. Math.* 55, 25-55 (1858)=*Ges. Abh.* 1, 101-134. Traducción inglesa, *Phil. Mag.* (4) 33, 485-512 (1867).

que lo atraviesan barrerán un tubo llamado *tubo de vórtices* (fig. 113). En una sección dada, se proyecta la vorticidad sobre la dirección normal a la superficie y se suman estas proyecciones en cada punto de la sección. La cantidad resultante se

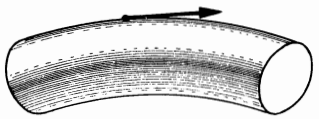


Fig. 113. Tubo de vórtices

llama la *intensidad* del tubo de vórtices en dicha sección (fig. 114). Después de introducir estas ideas nuevas, demostró Helmholtz tres importantes teoremas en torno a las mismas:

1. *La intensidad de cada tubo de vórtices es la misma en todas las secciones.*
2. *Una partícula de fluido exterior a un tubo de vórtices nunca entra en éste, y una partícula interior al mismo nunca se escapa.*
3. *La intensidad del tubo de vórtices permanece constante durante su movimiento.*

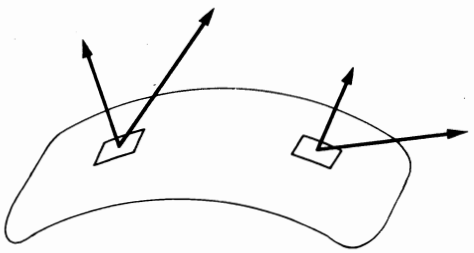


Fig. 114. Intensidad de un tubo de vórtices

Observamos en estos teoremas que:

a) No se propone ninguna ley física nueva. Helmholtz empleó únicamente las ecuaciones de una teoría establecida 100 años antes.
b) Los resultados no se basan en estudios experimentales sino que son teoremas matemáticos.
c) No se resuelve ningún problema de contorno.
d) No se obtiene ninguna predicción numérica para comparar con resultados experimentales.

No obstante, son universalmente reconocidos estos teoremas como obras maestras de la hidrodinámica. Al publicarlos, observó Helmholtz que aunque era cierto que la solución completa de los problemas con los que se relacionan seguía siendo posible únicamente en unos pocos de los casos más simples, sus teoremas habían conseguido que la clase entera de estos movimientos fuera "conceptualmente accesible".

Yo creo que esto es lo que queremos decir cuando afirmamos que *entendemos* en el sentido matemático, a un tema dado. Entendimiento es justamente lo que nos dan los teoremas de Helmholtz. Visualizamos al fluido entero compuesto de tubos de vórtices, y a medida que procede el movimiento, estos tubos pueden deformarse y torcerse en todas direcciones, a pesar de lo cual continúan separando al fluido en partes distintas. Además, cada tubo mantiene su intensidad. Esto es, si gira más de prisa el fluido, ha de encogerse el tubo, mientras que si disminuye la rotación, habrá de hincharse el tubo. Una vez iniciado este movimiento de rotación de las partículas, nunca puede perderse del todo, y por otra parte, no se puede crear rotación en una partícula que no estuviera inicialmente girando sobre sí misma. Los teoremas de Helmholtz no resuelven ningún problema particular; sin embargo, han demostrado ser tesoros en estudios subsiguientes de movimientos en torbellino. Se enseñan en todo curso introductorio de mecánica de fluidos. Aunque no explican los fenómenos de la turbulencia ni de los vientos atmosféricos, proporcionan herramientas habitualmente empleadas por todo estudioso de estos campos. Observando a los teoremas de Helmholtz desde nuestra perspectiva actual, vemos en ellos algunas cualidades que les son particulares, pero también dos que son necesarias para toda gran obra en mecánica racional:

A. *Conceptos* nuevos.
B. Rigurosa *demostración* matemática.

Los teoremas de Helmholtz fueron reformulados de manera distinta por Lord Kelvin[7] en 1869. Introdujo Kelvin un concepto aún más importante. Consideremos un circuito cerrado de partículas de fluido, y proyectemos en cada punto la velocidad del fluido sobre la tangente al circuito en dicho punto. A la suma de todas estas proyecciones la llamó Kelvin la *circulación* del circuito (fig. 115). La circulación es una medida de la velocidad media de rotación de la curva cerrada. A continuación, demostró Kelvin que los teoremas de Helmholtz son equivalentes a una sola afirmación:

La circulación de una curva cerrada de partículas de fluido permanece constante a lo largo del movimiento.

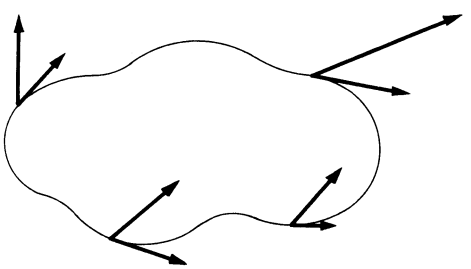


Fig. 115. Circulación de una curva cerrada

[7] W. Thomson, "On vortex motion", *Trans. Roy. Soc. Edinburgh* **25**, 217-260 (1869) = *Collected Papers* **4**, 13-66.

Esto es, no importa cómo se gire, arrastre, o tuerza el circuito de fluido durante el movimiento de rotación; sigue sin variar su circulación. El teorema de Kelvin exhibe de modo patente las cualidades *A* y *B* citadas arriba.

Los teoremas de Helmholtz y Kelvin se refieren a un problema de hacía ya 100 años antes de la fecha de su publicación; actualmente gozan de casi 100 años de existencia. En 1950, el meteorólogo alemán, Hans Ertel[8] publicó una bella contribución a precisamente este tema, el de los movimientos de rotación en fluidos ideales. Consideremos un movimiento de rotación estacionario cuyos caminos son circuitos cerrados perpendiculares a cierta superficie (fig. 116). Se supone que el

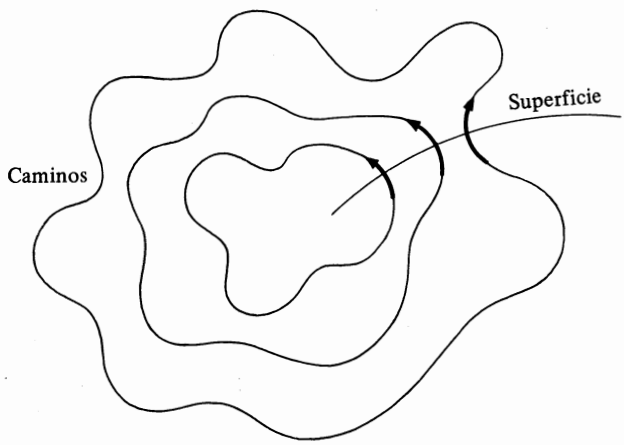


Fig. 116. Los movimientos circulatorios de Ertel.

carácter de este movimiento no varía en el tiempo. Siendo éste el caso, cualquier partícula dada en uno de los circuitos toma tanto tiempo para dar la vuelta completa como cualquier otra partícula sobre el mismo circuito. Así, cada circuito posee un tiempo determinado de recorrido, o *período.* Durante 200 años se ha sabido que cada camino tiene una *energía* determinada; el teorema de Kelvin afirma que cada camino tiene una *circulación* determinada y constante. Ertel tuvo el discernimiento para percibir que circulación, energía y período deben de estar relacionados entre sí, y para dos circuitos contiguos demostró que:

$$\text{Período} = \frac{\text{Diferencia de circulaciones}}{\text{Diferencia de energías}}$$

Aunque los teoremas de Helmholtz y Kelvin proporcionan una imagen geométrica, el de Ertel nos da la primera idea acerca del tiempo que requiere un fluido para realizar un movimiento de tipo torbellino.

---

[8] H. Ertel, "Ein Theorem über asynchron-periodische Wirbelbewegungen kompressibler Flüssigkeiten", *Misc. Acad. Berol.* 1, 62-68 (1950).

3. EL PRINCIPIO VARIACIONAL DE REISSNER EN LA ELASTICIDAD LINEAL

Después de la mecánica de fluidos, la rama más antigua de la mecánica de materiales es la elasticidad, la ciencia de la deformación de cuerpos bajo cargas. Ya hace 125 años se establecieron las ecuaciones fundamentales para pequeñas variaciones de forma. Desde hace unos setenta y cinco años conocemos dos maneras alternativas de afirmar, de modo económico, las leyes básicas de esta teoría:

1. Entre todos los cambios de forma compatibles con desplazamientos dados en la superficie de contorno, aquel que ocurre de acuerdo con la elasticidad lineal produce la mínima energía almacenada.
2. Entre todas las fuerzas interiores estáticamente posibles y compatibles con fuerzas dadas aplicadas en la superficie de contorno, aquellas que se dan de acuerdo con la elasticidad lineal producen la mínima energía complementaria.

En el segundo teorema, "energía complementaria" significa energía almacenada menos el trabajo realizado por las cargas superficiales en producir los desplazamientos superficiales. Ambos asertos son lo que se llaman *principios variacionales.* Al comparar diferentes estados concebibles de un cuerpo deformado, afirman que el estado que de hecho ocurre es tal que dé el valor mínimo posible a una cierta cantidad. Se precian los principios variacionales por varias razones: (1) caracterizan una teoría entera en términos de un único concepto simple, (2) son igualmente válidos para todos los métodos de descripción, (3) a menudo pueden emplearse para demostrar teoremas analíticos relacionados con el tema, (4) pueden emplearse con frecuencia para calcular soluciones numéricas en casos particulares.

Para la teoría de la elasticidad lineal, las dos formulaciones variacionales clásicas son distintas. Una se refiere a desplazamientos, la otra a fuerzas interiores. Si, como a menudo sucede, en una parte de la superficie de contorno se da el desplazamiento, mientras que en otra parte se dan las cargas, ninguno de los dos principios es aplicable (fig. 117). Para cada principio, se suponen conocidas la mitad de las

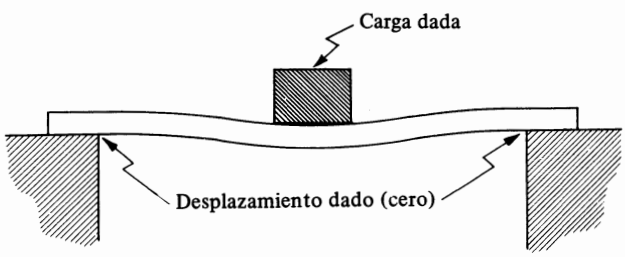


Fig. 117. Contorno de una viga elástica

ecuaciones básicas de la teoría, mientras que la otra mitad son consecuencias del principio; las dos mitades de estas ecuaciones básicas juegan papeles intercambiados en los dos principios. Ello resulta una circunstancia desafortunada puesto que un principio variacional debería expresar la situación en su totalidad.

En 1950, Eric Reissner[9], de Cambridge, Massachusetts, estableció un nuevo principio variacional en el cual nada se presupone. En parte del contorno pueden darse las cargas; en otras partes, el desplazamiento; en todavía otras, una porción de la carga y una porción del desplazamiento. En la comparación de los distintos estados posibles, se varían la totalidad de las seis medidas de fuerza interna y las seis medidas de deformación. Definió Reissner lo que podría llamarse un nuevo tipo de energía almacenada, dependiente de todas estas doce cantidades. Demostró que el dar a esta nueva energía el mínimo valor compatible con las cargas y los desplazamientos dados en el contorno es equivalente a satisfacer el conjunto entero de ecuaciones de la teoría de elasticidad lineal. Así, pues, se ha demostrado una expresión variacional plenamente general, que incluye como casos particulares las dos antiguas.

4. EL "PRINCIPIO DE ST. VENANT", SEGUN V. MISES Y STERNBERG

Hace precisamente un siglo, St. Venant[10] creó un ingenioso método para hallar las fuerzas y deformaciones interiores cuando se somete una barra a torsión. Según este método, puede ser lo que se quiera el par total que tuerce la barra, pero la distribución detallada de carga sobre los extremos de la barra viene determinada por el propio método y no puede asignarse *a priori*. Por lo tanto, no produce una solución completamente general del problema elástico. Razonaba St. Venant que esto no tenía importancia. Cuando se tuerce una barra en un experimento, normalmente es imposible averiguar la distribución de cargas. Por lo general, todo lo que se conoce es el par total (fig. 118). Cerca del mismo extremo, cargas distintas pueden, en

Fig. 118. Cargas equivalentes en la torsión de una barra

efecto, producir efectos considerablemente diferentes, pero ya lejos del extremo no se percibe ninguna diferencia, con tal que el par total sea el mismo. Treinta años

---

9 E. Reissner, "On a variational theorem in elasticity", *J. Math. Phys.* 29, 90-95 (1950); "On a variational theorem for finite elastic deformations", *J. Math. Phys.* 32, 129-135 (1953).

Nota añadida para la reimpresión. En realidad, parece que el principio variacional se debe a M. Born, quien lo dio para problemas bidimensionales, sin tomar en cuenta las condiciones de contorno, en § IV del Anhang a su Habilitationsschrift, *Untersuchungen über die Stabilität der elastischen Linie in Ebene und Raum, unter verschiedenen Grenzbedingungen*, Göttingen, 1906. En tres dimensiones, de nuevo sin condiciones de contorno, fue dado por E. Hellinger en § 7e de su artículo "Die allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua", *Enz. Math. Wiss.* 4₄, 602-694 (1914). La contribución nueva de Reissner consiste en la formulación de una integral de contorno tal que da lugar a condiciones de contorno apropiadas para todos los problemas típicos de la elasticidad lineal, y en aplicaciones a casos particulares.

10 A. J. C. B. de St. Venant, "Mémoire sur la torsion des prismes...", *Mém. Divers Savants Acad. Sci. Paris* 14, 233-560 (1855); también emitida en tirada aparte, *"De la Torsion des Prismes..."*, París, 1855.

más tarde, Boussinesq[11] expresó la sugerencia de St. Venant aproximadamente como sigue: *La diferencia entre los efectos producidos por dos cargas diferentes pero equivalentes aplicadas en una parte dada del cuerpo se hace muy pequeña a grandes distancias de dicha parte.* Dos cargas son "equivalentes" si tuvieran exactamente el mismo efecto sobre el cuerpo si éste fuera rígido. Esta noción que acabo de expresar ha sido aceptada en general, siendo conocida como *principio de St. Venant.*

Aquí podemos ilustrar una diferencia entre la ingeniería o mecánica aplicada y la mecánica racional al observar las diversas actitudes tomadas frente al principio de St. Venant. Mediante experimentos, el principio puede someterse a pruebas parciales e indirectas. De hecho, se ha procedido así, pudiendo comprobarse su bondad. Por lo tanto, se emplea con confianza por parte de los ingenieros. Cada vez que se diseña un puente o un buque, se aplica repetidamente, si bien a menudo inconscientemente, el principio de St. Venant. En la mecánica racional, sin embargo, la elasticidad es una teoría matemática, cuyas ecuaciones básicas están fijadas de una vez y para siempre. Si es cierto el principio de St. Venant, debería *demostrarse* como teorema matemático. De hecho, ha habido muchos intentos infructuosos de lograr este propósito.

Si fuera la demostración del principio de St. Venant un simple problema de análisis puro, no lo mencionaría aquí. Mas como otros problemas reales de mecánica racional, exigió una búsqueda preliminar de conceptos. Mi enunciado del mismo dado arriba es un tanto difuso, y se han propuesto varios enunciados diferentes. Todos éstos fueron analizados en 1945 por el ya difunto Richard v. Mises[12] de Cambridge, Massachusetts. Demostró que todos eran bien triviales o bien falsos. Mises propuso considerar el caso donde se aplican las cargas en el interior de una pequeña esfera de radio r, a la cual, a continuación, se permite encogerse (fig. 119). En un punto fijo dentro del cuerpo, deberíamos intentar mostrar que a medida que r tiende a cero, los efectos de dos cargas equivalentes en la esfera son más aproximadamente del mismo orden de magnitud que los de dos cargas no equivalentes. Mediante ejemplos de un tipo particular, demostró Mises que no podría ser correcta esta formulación, por lo que propuso otra más restringida.

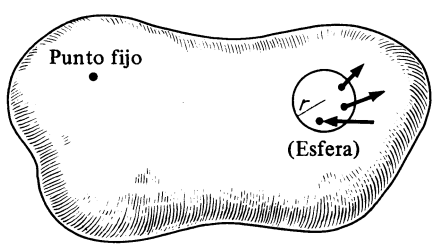


Fig. 119. Formulación dada por v. Mises al principio de St. Venant

---

11 J. Boussinesq, *Application des Potentiels à l'Etude de l'Equilibre et du Mouvement des Solides Elastiques,* París, Gauthier-Villars, 1885.

12 R. v. Mises, "On Saint-Venant's Principle", *Bull. Am. Math. Soc.* 51, 555-562 (1945).

En 1954, Eli Sternberg[13] de Chicago, puso en una forma matemática general los puntos de vista de Mises, con lo que logró, al fin, un enunciado definido, capaz de ser demostrado o refutado. Obsérvese que lo que estaba implicado durante los primeros 99 años de la historia de este problema era el rastreo de los *conceptos* preliminares al uso de las herramientas analíticas de costumbre asociadas con la matemática. Sternberg procedió a construir una demostración rigurosa, encontrando que era *falso* el principio de St. Venant[14]. No obstante, pudo demostrar su validez bajo ciertas restricciones adicionales, similares a aquellas sugeridas por Mises y que se dan en múltiples casos de aplicación práctica. Por ejemplo, si las cargas son paralelas a una dirección fija, y si las dos cargas siguen siendo equivalentes al girarse, es válido el principio de St. Venant.

5. GRANDES DEFORMACIONES ELASTICAS

Aunque las investigaciones anteriores se incluyen dentro de la teoría de pequeñas deformaciones elásticas, dicha teoría es de por sí insuficiente para describir el comportamiento de materiales tales como la goma, la cual puede estirarse fuertemente a pesar de lo cual salta de nuevo a su forma inicial. Hace unos setenta u ochenta años se formuló una teoría matemáticamente apropiada de las grandes deformaciones elásticas. Sin embargo, a pesar de que esta teoría es sólo un poco más reciente que la de pequeñas deformaciones, es bien diferente su *status*. Cursos universitarios sobre la teoría de pequeñas deformaciones son de lo más normal; se han publicado millares de trabajos acerca de la misma; durante un siglo ha habido libros de texto e incluso respetables tratados escritos sobre ella. La teoría de grandes deformaciones, por el contrario, ha sido conocida únicamente por unos pocos; pocos han sido los estudios publicados, y desde 1900 a 1948 disminuyó el conocimiento general de la misma hasta el extremo de que muchos especialistas en mecánica eran parcialmente ignorantes de su existencia. No fue hasta el año 1948 que se publicó, en ruso, el primer libro sobre esta teoría.

Una excepción a estas afirmaciones la constituye la obra de Antonio Signorini[15] de Roma. De todas las personas que mencionaré esta noche, Signorini es el único

---

13 E. Sternberg, "On Saint-Venant's Principle", *Quart. Appl. Math.* 11, 393-402 (1954).

14 *Nota añadida para la reimpresión.* Posteriormente a la presentación de esta conferencia, he llegado a dudar de la relevancia de la formulación que hizo v. Mises del principio de St. Venant. Me parece que el principio verdadero se refiere al cuerpo en conjunto en vez del comportamiento local de esfuerzos y deformaciones. En 1959 enuncié lo que me pareció, y sigue pareciendo, una posible forma precisa de las ideas vagamente expresadas por el propio St. Venant. Véase mi artículo, "The rational mechanics of materiales – past, present, future", *Appl. Mech. Rev.* 12, 75-80 (1959), reimpreso con correcciones y adiciones en *Applied Mechanics Surveys*, Sparta Books, 1966. Desde entonces, se ha acumulado una importante literatura sobre enunciados precisos relacionados con el principio de St. Venant. El trabajo clave es el de R. A. Toupin, "Saint-Venant's Principle", *Arch. Rational Mech. Anal.* 18, 83-96 (1965). El resultado de Toupin es de forma integral: La energía almacenada en la parte de un cilindro a una cierta distancia de un extremo cargado mediante fuerzas equilibradas está acotada en términos de la mínima frecuencia propia de vibración libre de una sección del cilindro.

15 Se incluyen los resultados principales de las numerosas publicaciones de Signorini, relacionándose con investigaciones anteriores y otros más recientes, en los tratados de Truesdell & Toupin, "The Classical Field Theories", *Handbuch der Physik* III/1, 1960, y de Truesdell & Noll, "The Non-linear Field Theories of Mechanics", *Handbuch der Physik* III/3, 1965. Véanse en especial § § 220-222 de aquél y § 94 de éste.

que ocupa un puesto de "Profesor de Mecánica Racional". Desde la década de los años treinta hasta el presente, Signorini y sus alumnos han mantenido los conocimientos clásicos a la vez que han hecho también importantes adiciones. En primer lugar mencionaré una bella y sencilla teoría de valores medios observada por Signorini en 1933 y posteriormente ampliada. Esta teoría nos permite estimar, para cualquier material, tanto si es elástico como si no, las fuerzas internas *medias* si conocemos las cargas aplicadas. En cuanto a la propia elasticidad, el enfoque de Signorini ha sido conjeturar acerca del modo particular según el que la energía almacenada depende de la deformación. Adoptando como hipótesis una u otra forma, explora las propiedades de tal material, comparándolas con el comportamiento experimental de materiales reales. Signorini ha obtenido cierto éxito con algunas teorías particulares. Aunque superficialmente este punto de vista puede parecer semejante a muchos de los estudios semi-empíricos de ingeniería sobre deformaciones grandes, en realidad, es de carácter diferente y muy precisa la obra de Signorini. En mi opinión, investigaciones posteriores muestran que no es adecuado su enfoque, pero hay productos secundarios del mismo para los cuales todavía no se conocen correspondencias en los trabajos más generales que más adelante se describirán. Estos productos secundarios son restricciones sobre la manera en que las diversas medidas de elasticidad de un cuerpo puedan depender de su temperatura. Naturalmente, tales restricciones surgen en parte de las leyes de la termodinámica, las cuales se incluyen en el sistema general de la mecánica. En particular, se demuestra que las restricciones sobre la energía interna son consecuencias de la forma de la energía elástica almacenada. De los numerosos resultados en este dominio, enunciaré sólo uno que es de carácter más general que los demás: En 1955, Piero Bordoni[16], de Pisa, demostró que para cualquier tipo de sólido elástico, los calores específicos y las compresibilidades están relacionadas entre sí en exactamente la misma manera como sucede en un gas perfecto.

Una investigación sobre las grandes deformaciones elásticas de una orientación esencialmente nueva fue iniciada en 1948 por Ronald Rivlin[17], quien trabajaba por aquel entonces en Londres. Buscaba soluciones exactas para problemas sencillos pero importantes con respecto a cuerpos cuyo volumen no varía, ni siquiera estando sometidos a deformaciones arbitrarias. Su innovación básica consistió en dejar *enteramente sin restricciones* la forma de la función de energía almacenada. Son tan complicadas las ecuaciones de la teoría que parecería inútil un enfoque de tal generalidad. De hecho, sólo había faltado quien se le ocurriese la idea; resultaron ser fáciles los cálculos. Rivlin halló las soluciones plenamente generales correspondientes a la torsión de una varilla circular (fig. 120), la flexión de un bloque rectangular (fig. 121), y varios otros casos. Se compararon estas soluciones con medidas experimentales hechas con caucho y de esta manera se determinó la forma de la

---

16 P. G. Bordoni, "Sopra le trasformazioni termoelastiche finite di certi solidi omogenei ed isotropi", *Rend. mat. e delle sue Applic.* (Roma) (5) **12**, 237-266 (1953). Véase § 5. *Nota añadida para la reimpresión.* En la actualidad, ya no me parece clara la base termodinámica de este trabajo.

17 La obra de Rivlin se presenta en todo detalle y se relaciona con otros trabajos en elasticidad en el segundo tratado citado en la nota de pie de página núm. 15. Acaso las más impresionantes de sus numerosas publicaciones sobre elasticidad son "Large elastic deformations of isotropic materials", partes IV y V, *Phil. Trans. R. Soc. London* A **241**, 379-397 (1948), y *Proc. R. Soc. London* A **195**, 463-473 (1949). Ambos artículos se han vuelto a imprimir en *Problems of Non-Linear Elasticity*, Gordon & Breach, 1965.

función de energía almacenada para el caucho. Las medidas mostraron que no eran físicamente correctas ninguna de las formas que se habían aventurado en fechas diversas por varias personas distintas. En particular, se encontró que eran inadecuadas las formas sugeridas por el razonamiento común de que pueden despreciarse

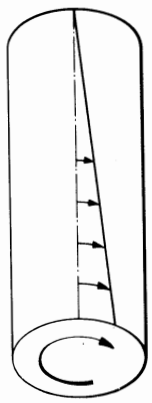


Fig. 120. Varilla circular torcida

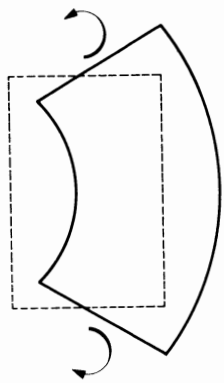


Fig. 121. Bloque rectangular flexionado

los efectos de ciertas cantidades "pequeñas". Sustituyendo la forma experimental en otras soluciones particulares, Rivlin pudo predecir el comportamiento del caucho en casos donde fue estirado hasta dos e incluso tres veces su longitud inicial, con una precisión de unos pocos por ciento. Esto es una hazaña notable. Debo añadir que en la antigua teoría de pequeñas deformaciones, "pequeñas" significa "casi invisiblemente pequeñas": Una variación en longitud del uno por ciento es, por lo general, demasiado grande para recibir una descripción adecuada por la teoría expuesta en los textos de elasticidad. En segundo lugar, desde hacía un siglo se sabía que el caucho no sigue las predicciones de la teoría de pequeñas deformaciones elásticas, y se habían dedicado muchas investigaciones de índole física o química hacia intentos de obtener una teoría apropiada para el caucho a partir de hipótesis acerca de su estructura molecular. Las nuevas investigaciones en elasticidad demuestran que se predice el comportamiento mecánico del caucho de manera plena y precisa mediante la aplicación de principios puramente mecánicos, *con tal de que éstos no sean degradados por así llamadas "aproximaciones".* En lo que respecta a la aplicación a los fenómenos físicos, fue esto un triunfo claro de los principios de la mecánica y de la generalidad. Del trabajo de Rivlin se ha desarrollado una nueva rama de la ingeniería que acaso podría llamarse "mecánica aplicada del caucho".

6. VISCOSIDAD NO LINEAL Y TEORIAS NO LINEALES EN GENERAL

En el año 1945, un camino nuevo fue abierto por Marcus Reiner[18] de Haifa. Inicialmente estudiaba éste los fluidos y no sólidos, pero pronto fue comprendido que aquí se disponía de un método general en la mecánica de materiales no lineales. Antes de seguir adelante debo explicar el significado de los términos "lineal" y "no-lineal". En una teoría lineal, dos causas aplicadas al mismo tiempo producen los mismos efectos que si se aplicasen separadamente primero una y después la otra. Por ejemplo, si aplicamos un esfuerzo cortante a un bloque y después lo comprimimos, el resultado es el mismo que si aplicamos simultáneamente la compresión y el esfuerzo cortante (fig. 122). En una teoría no-lineal no tiene por qué ser así.

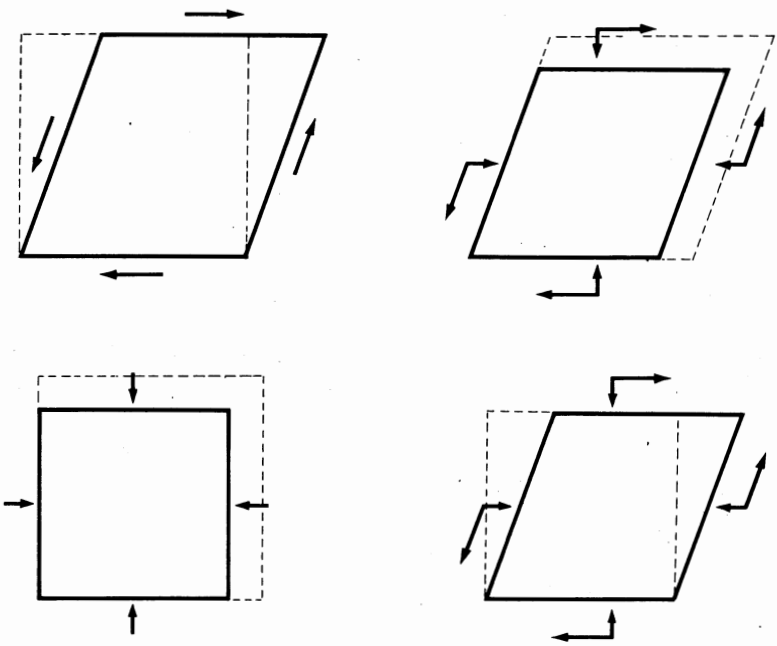


Fig. 122. Compresión y cizallamiento en una teoría lineal

De hecho, en una teoría no-lineal es, por lo general, necesario aplicar fuerzas compresivas para que sea posible un cizallamiento sin compresión. No parece como si hiciera nada la fuerza compresiva, pero si no se aplica, el cuerpo se expansiona (fig. 123). Puede observarse un efecto más conocido de no-linealidad en el giros-

---

[18] M. Reiner, "A mathematical theory of dilatancy", *Am. J. Math.* 67, 350-362 (1945). Reimpreso en *Rational Mechanics of Materials*, Gordon & Breach, 1965.

Véase también W. Prager, "Strain hardening under combined stresses", *J. Appl. Phys.* 16, 837-840 (1945), donde se infiere el mismo teorema algebraico en un contexto diferente.

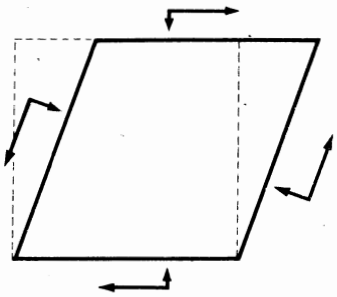


Fig. 123. Teoría no-lineal: Se requieren fuerzas compresivas para efectuar un cizallamiento sin compresión

copio, que normalmente sale despedido en una dirección muy distinta de aquella hacia la cual se le había empujado. La mecánica en conjunto es no-lineal; las partes especiales que son lineales pueden parecer más próximas al sentido común, pero ello tan sólo demuestra que el buen sentido en mecánica no es nada frecuente. No deberíamos dejarnos irritar si los materiales manifiestan carácter en vez de una dócil obediencia.

A pesar de que la mecánica es esencialmente no-lineal, poca exageración sería el afirmar que durante 150 años sólo se había estudiado a la mecánica lineal y su matemática asociada. Se convirtió en norma la práctica de sustituir inmediatamente las ecuaciones obtenidas para la descripción de un fenómeno por una así llamada "aproximación" lineal. Pero sería un error ver en esto la tradición originaria de la mecánica. De hecho, hicieron falta unos cien años de desarrollo antes de que fuera generalmente reconocido que linealidad es sinónimo de facilidad. La linealización comenzó alrededor de 1780, pero no alcanzó el dominio indisputado hasta fines del siglo pasado, bajo la influencia de Rayleigh. Es cierto que hay múltiples situaciones físicas donde es adecuada una teoría lineal, pero no altera ello el hecho de que en otras muchas situaciones no es justificada la linealización. Por otra parte, tanto la matemática como los principios mecánicos asociados con fenómenos no-lineales son mucho más interesantes.

Puede ser que un siglo de linealización haya agotado mayormente las capacidades de ésta para explicar los fenómenos físicos a la vez que haya permitido la exploración casi total de la matemática asociada; pero por otra parte, ha fomentado una cierta rigidez de enfoque que acaso podría denominarse "pensamiento lineal". Ello ha hecho realmente más difícil una vuelta a problemas no-lineales que lo que quizás parezca haber sido de aquí a varios años. En particular, ha engendrado una emoción lindando entre la apatía y el temor en la recepción otorgada a los trabajos no-lineales por parte de la gran mayoría de los investigadores, los cuales, hoy por hoy, permanecen absortos en los convencionales problemas lineales.

El estudio de Reiner de 1945 y un trabajo similar de Rivlin[19] de 1948 puso en nuestras manos una nueva herramienta para la exploración de fenómenos no-

---

[19] R. S. Rivlin, "The hydrodynamics of Non-Newtonian fluids, I", *Proc. R. Soc. London* 193, 260-281 (1948); reimpreso en *Rational Mechanics of Materials,* Gordon & Breach, 1965.

lineales en materiales. Su principal resultado es un nuevo teorema[20] de álgebra, de una amplia utilidad en mecánica. Es aplicable a cualquier material, sólido o fluido, con tal de que las fuerzas internas surjan únicamente en respuesta a una sola medida de deformación. El ejemplo arriba citado acerca de la simple deformación cortante es una consecuencia típica de este nuevo enfoque. Otro, en el fondo el mismo, es: *Cuando se tuerce una varilla elástica un poquito, se alargará ésta en proporción al cuadrado del ángulo de torsión.* Otra aplicación del mismo principio es: *Cuando se hace girar un fluido alrededor de un cilindro fijo, irá subiendo por la superficie del cilindro, siendo la fuerza requerida para impedir tal subida proporcional al cuadrado de la velocidad de rotación* (fig. 124). El primer efecto se conocía experimentalmente desde hacía mucho tiempo. El segundo sólo se había observado específicamente más o menos al mismo tiempo que su enunciado, pero en seguida se reconoció como un efecto familiar. Por ejemplo, en la industria de pinturas se encontró que los mezcladores rotatorios tenían poco efecto debido a que la pintura se aglomeraba sobre ellos. Se dieron varias explicaciones físicas y químicas de este efecto, pero la teoría de fluidos no-lineales lo explica con facilidad y de una forma natural, basándose únicamente en razones mecánicas. Rivlin calculó soluciones exactas para las configuraciones que se dan en los viscómetros, y cuando se habían construido viscómetros capaces de medir los nuevos efectos, se encontró que concordaban aquéllas con los resultados experimentales.

Sería engañoso dar un énfasis excesivo al éxito de la teoría no lineal en la predicción de estos fenómenos. La construcción de una teoría particular que esté de acuerdo con cualquier medida dada no es, ni mucho menos, tan difícil como podría parecer. A decir verdad, durante las décadas de los años treinta y cuarenta se construyeron bastantes teorías *particulares* de elasticidad y fluidos no-lineales, y era la norma entre estas investigaciones el incluir siempre datos experimentales confirmando plenamente la teoría. Lo que es nuevo en los trabajos que acabo de describir es su *independencia* de la experimentación. Más bien, el nuevo enfoque nos proporcionó una visión unificada, un agarradero sobre toda una clase de teorías no-lineales. En lo que respecta a la aplicación experimental, el principal resultado establecido es que virtualmente *cualquier* razonable teoría no-lineal predice estos efectos, de modo que el que empíricamente se den, aunque ciertamente demuestre no-linealidad en materiales reales, no confirma ninguna de las numerosas teorías particulares.

Se habrán fijado Vds. que hemos cambiado de matiz. Los primeros avances que describí trataban de problemas específicos en teorías establecidas; ahora estamos repasando el descubrimiento de *teorías nuevas* del comportamiento mecánico. Esto, el aspecto más absorbente de la mecánica moderna, es lo que domina el campo en la actualidad.

Aunque he alabado la generalidad, debemos tener cierta precaución ante sus peligros. Es fácil pensar en un material que, cuando se deforma, en vez de gastar trabajo, lo produce. Podríamos ciertamente concebir tal material, pero no tiene interés en mecánica. Precisamente deseamos excluir este y otros malcomportamientos más sutiles de las teorías que creamos. En 1948 yo mostré que, sin abandonar la

---

20 *Nota añadida para la reimpresión.* En realidad, en cuanto teorema sobre funciones polinomias, llevaba ya mucho tiempo establecido este resultado, aunque era poco conocido. El razonamiento de Rivlin, al contrario del de Reiner, sugiere un teorema sobre funciones *generales;* tal teorema fue demostrado por Ericksen y él en 1955. Una demostración más sencilla, debida a Serrin, aparece en § 12 del segundo tratado citado en la nota de pie de página núm. 15.

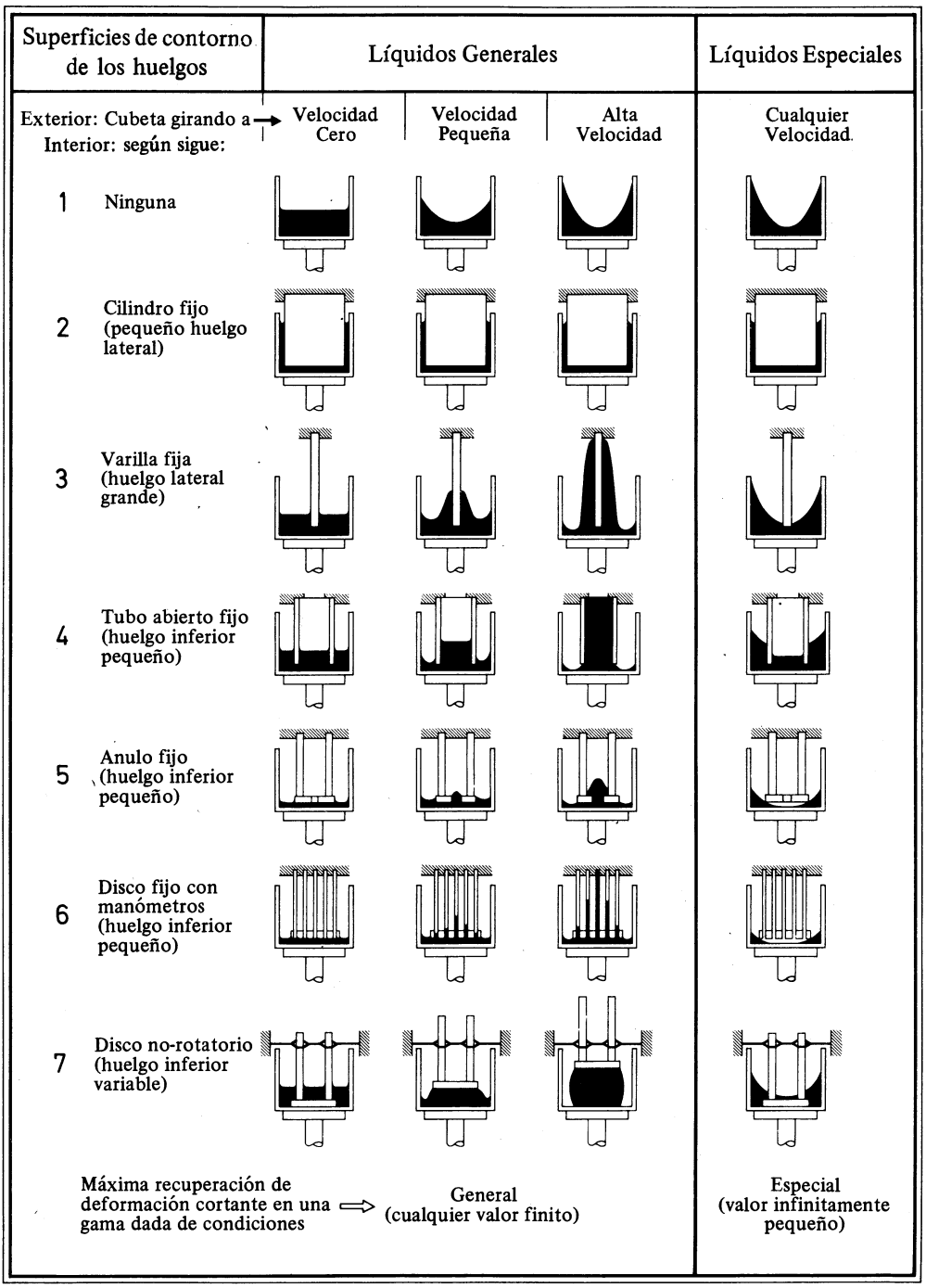


Fig. 124. Rotación de fluidos en una cubeta, según una relación esquemática de 1947, debida a Weissenberg (los fluidos "especiales" incluyen los lineales)

inclusividad de la obra de Reiner y Rivlin, podríamos clasificar a los materiales no-lineales mediante el empleo del análisis dimensional[21]. Los resultados nos permiten rechazar de inmediato muchos materiales que de otra manera podrían parecer razonables. Con respecto a la elasticidad, en 1952 yo propuse un requisito más específico[22]: *Cuando un cuerpo ha sido deformado, una deformación adicional requiere más energía almacenada.* No es esto tan trivial como parece puesto que no es obvio lo que se quiere decir por "deformación adicional". Este principio resultó implicar restricciones sobre la función de energía almacenada. En 1954, M. Baker y Jerald Ericksen de Washington reemplazaron esta idea por otra más general aplicable a fluidos tanto como a sólidos. En 1955, yo señalé que requisitos de esta índole están estrechamente relacionados con la propagación de ondas: Un cuerpo tan poco razonable como para negar el paso de ondas también puede que haga otras cosas más obviamente censurables. Al mismo tiempo, Ericksen y Richard Toupin de Washington establecieron una conexión entre estos requisitos y los de unicidad. Según uno de sus resultados, un cuerpo deformado debidamente receptivo a las ondas también es reacio a deformarse más, en más de una manera, en respuesta a pequeños desplazamientos adicionales dados en sus contornos. Esta clase de problemas, cuyo fin es distinguir entre libertad y libertinaje, todavía sigue siendo investigado.

7. EXPERIMENTO Y TEORIA

Hago aquí una pausa para responder a una pregunta sentida si no expresada por el público presente: ¿Por qué no medimos todas estas cosas? En primer lugar, la medida en mecánica no es tan sencilla como quizás podría parecer. A pesar de reparos por parte de los filósofos de la ciencia, la mecánica siempre ha sido mayormente expresada en términos de cantidades que no suelen ser medibles. De haber sido operacionalista la mentalidad científica de 1750, el diseño de un puente en 1956 se haría más incómodamente que lo que de hecho se hace en cualquier empresa de ingeniería actual. En segundo lugar, hemos tenido más de un siglo de experimentación, a menudo a gran escala y a gran coste, sobre el comportamiento mecánico de materiales. De haber resuelto la experimentación estas cuestiones, no estaría yo hablando acerca de las mismas aquí. La mecánica experimental es un campo reconocido que no precisa de defensa alguna; tiene sus propios problemas, métodos, y resultados, sus triunfos y sus fracasos. Puede, pero no necesita, cooperar con la mecánica aplicada y con la mecánica racional; éstas, a su vez, pueden, pero no tienen necesidad de cooperar con ella. Sin *experiencia,* no habría mecánica racional,

---

21 *Nota añadida para la reimpresión.* Aunque se resume este trabajo mío en §§ 119 A y 125 del segundo tratado citado en la nota de pie de página núm. 15, en la actualidad, no considero que sean más que triviales los resultados obtenidos por análisis dimensional. Mis publicaciones primeras efectivamente ilustraron los amplios efectos de la isotropía en la eliminación de lo que podría parecer generalidad superflua, pero aquí también, la idea en sí no era realmente nueva, y los métodos que empleé no eran ni rigurosos ni generales.

22 *Nota añadida para la reimpresión.* La cuestión entera de las desigualdades *a priori* en la teoría de la elasticidad es intrincada y está todavía por esclarecer, a pesar de lo mucho que se ha descubierto. A los nombres mencionados en el texto, deberían añadirse los de Hadamard, Coleman, y Noll. Todos los resultados que se conocían hasta el año 1965 vienen presentados en §§ 51-53, 71, 87, 90, y pássim en el segundo tratado citado en la nota de pie de página núm. 15.

pero les induciría a Vds. en error si pretendiese que la experimentación, tanto ahora como hace 200 años, había influido fuertemente en aquellos que investigan en esta disciplina. En este sentido, la experimentación es, como el alcohol, un estimulante a tomar con moderación. Vivifica consultar a intervalos decentes el oráculo de una buena cosecha, pero el exceso de la cepa común trae consigo el entontecimiento.

Los estudiosos de la mecánica racional dirigen buena parte de sus esfuerzos en pensar en *cuál es el posible comportamiento de los materiales.* No han sido infructuosos estos pensamientos en cuanto a información sobre cómo se comportan de hecho ciertos materiales. Los materiales reales no son ingenuos; tampoco son irracionales.

8. Principios de invariancia

En su comportamiento, difieren los materiales de las mujeres también en otro respecto: Se portan exactamente de la misma manera, sea quien sea el que les observe. La respuesta de un material es independiente del observador. Ahora bien, esta afirmación se vuelve menos trivial que lo que podría parecer cuando hacemos dos observaciones más: Primeramente, las propias leyes de la mecánica clásica cambian bien perceptiblemente cuando el mismo cuerpo es considerado por observadores diferentes; en segundo lugar, para expresar la respuesta del cuerpo en lenguaje matemático, siempre empleamos el sistema de referencia de *algún* observador. El problema radica, pues, en hallar la manera de limitar nuestros materiales ideales a aquellos cuya respuesta es debidamente *invariante* con respecto al cambio de observador.

9. Teorias dependientes del tiempo para el comportamiento de materiales

Para las viejas teorías lineales, es trivial este problema y se resuelve automáticamente empleando los bien conocidos principios del análisis tensorial. Para las teorías no-lineales que acabo de describir, el problema es relativamente sencillo. Pero la cosa se complica cuando dependen las fuerzas interiores de más de una medida de deformación, o cuando las leyes fundamentales relacionan entre sí derivadas respecto del tiempo. Para un caso muy particular de derivadas temporales, el problema fue planteado y resuelto por Cauchy[23] hace un siglo; en circunstancias un tanto más generales pero todavía limitadas, por Zaremba[24] en 1903. La naturaleza del problema general y una solución correcta fueron apuntadas por vez primera en 1950 por J. G. Oldroyd[25], que trabajaba por aquel entonces en Maidenhead.

---

23 A. L. Cauchy, "Sur l'equilibre et le mouvement intérieur des corps considérés comme des masses continues", *Ex. Math.* 4, 293-319 (1829) = *Oeuvres* (2) 9, 342-369.

24 S. Zaremba, "Sur une forme perfectionnée de la théorie de la relaxation", *Bull. inter. Acad. Sci. Cracovie* 1903, 594-614.

25 J. G. Oldroyd, "On the formulation of rheological equations of state", *Proc. R. Soc. London* A **200**, 523-541 (1950). Reimpreso en *Rational Mechanics of Materials,* Gordon & Breach, 1965.

Un tratamiento más satisfactorio fue propuesto en 1955 por Walter Noll[26], entonces ubicado en Bloomington. La formulación de Noll es en términos de un principio que él denomina *la isotropía del espacio,* mediante el cual se puede comprobar si las ecuaciones básicas de cualquier material ideal propuesto satisfacen las exigencias de invariancia. Se introdujeron métodos similares, un tanto diferentes en detalle y en alcance, en dos publicaciones escritas por Rivlin conjuntamente con Ericksen y Bárbara Cotter de Providence; también por T. Y. Thomas de Bloomington[27].

Mediante el empleo de su principio, Noll fue capaz de construir la primera teoría adecuada de la *continuidad* de los estados sólido y fluido. En esta teoría unificada aparecen materiales que exhiben las respuestas tanto de sólidos como de fluidos, siendo incluídas como posibilidades extremas las teorías no-lineales de la elasticidad pura y la fluidez pura. La idea de tales materiales había sido sugerido un siglo antes por Maxwell[28], y había sido explorado con éxito parcial por Zaremba, pero la obra de Noll es la primera que combina la exactitud con la generalidad. Noll obtuvo soluciones exactas para ciertas situaciones especiales y demostró que su teoría implicaba el derrumbamiento del movimiento uniforme a altas velocidades. Así se ha iniciado una posible teoría de transición continua del comportamiento ordinario al fallo o rotura últimos.

En 1953 yo había propuesto una teoría más modesta a la vez que más concreta del comportamiento elástico. En vez de relacionar las fuerzas interiores a la deformación, mi idea era conectar la velocidad de variación de aquellas con la velocidad de variación de ésta. La teoría resultante, llamada *hipo-elasticidad*[29], concuerda con la vieja teoría lineal para pequeñas variaciones de forma, pero es diferente del todo para grandes variaciones. La nueva teoría ha resultado ser bastante general: En 1955, Noll demostró que incluye la teoría clásica de grandes deformaciones elásticas de materiales isótropos, y en 1955-1956, Albert Green, de Newcastle, y T. Y. Thomas establecieron que, aparte de una hipotética condición de fluencia, contiene todas las teorías usuales de fluencia plástica, con tal que se corrijan éstas en varios respectos. Es importante la reserva "aparte de una hipotética condición de fluencia". Durante décadas, las teorías de plasticidad habían empleado una condición especialmente concebida para expresar la fluencia plástica, una condición de índole semi-empírica resultante de un compromiso entre la experimentación y la teoría y no relacionada con otras partes de la mecánica. Yo había pensado desde hacía mucho tiempo que esto era una lástima; que en realidad, la fluencia es un fenómeno que debe *predecirse* y no presuponerse por una teoría como es debido; que una teoría mecánica debe incluir la fluencia plástica no como condición primaria sino como el resultado de circunstancias antecedentes que llevan al fallo o desmoronamiento elástico. En 1955

---

[26] W. Noll, "On the continuity of the solid and fluid states", *J. Rational Mech. Anal.* 4, 3-81 (1955). Reimpreso en *Rational Mechanics of Materials,* Gordon & Breach, 1965.

[27] Aunque se describen los métodos de estos autores en el primero de los dos tratados citados en la nota de pie de página núm. 15, han sido superados y reemplazados por el enfoque más claro y más general debido a Noll, el cual se empleó como una de las bases principales del segundo tratado mencionado allí.

[28] J. C. Maxwell, "On the dynamical theory of gases", *Phil. Trans, R. Soc. London A* 157, 49-88 (1867)=*Phil. Mag.* (4) 35, 129-145, 187-217 (1868)=*Papers* 2, 26-78.

[29] Mis propias investigaciones y aquellas de Noll, Green, y Thomas en esta materia se presentan y se interrelacionan con trabajos posteriores en §§ 95-103 del segundo tratado citado en la nota de pie de página núm. 15, donde pueden encontrarse, asimismo, referencias completas a las fuentes.

demostré que en ciertos casos la hipo-elasticidad proporciona una teoría llana y sencilla que es precisamente del tipo deseado. Para ciertos cuerpos hipo-elásticos experimentando deformaciones cortantes, demostré que la fuerza que se requiere para efectuar la deformación cortante sigue una curva del tipo indicado en la fig. 125.

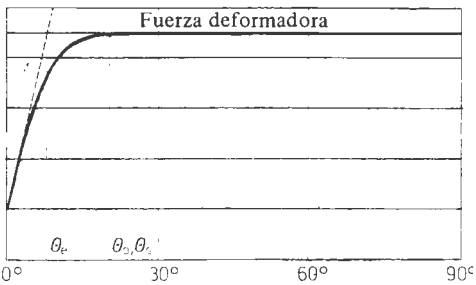


Fig. 125. Fluencia o deformación permanente primaria y secundaria según una teoría particular de hipo-elasticidad

10. El teorema ergodico de Khinchin[30]

Para concluir la relación de avances, quisiera volver de la exploración de nuevas teorías y considerar el progreso en una vieja teoría ya establecida: la mecánica estadística. La materia aparentemente continua se representa en mecánica estadística como un conjunto muy numeroso de masas puntuales llamadas "moléculas", las cuales están en movimiento rápido y, en buena medida, independiente. El objeto consiste en relacionar magnitudes de la experiencia, tales como fuerza y velocidad, a *valores medios* en el conjunto de moléculas. Un promedio de este tipo se denomina *media sobre el espacio de fases o media fásica.* No se conocen las condiciones que definen un movimiento particular de las moléculas. Más bien, se registra como posible toda una clase de tales movimientos, y a cada movimiento dentro de esta clase se le asigna una *probabilidad* de que suceda.

Al introducir tales valores medios hace unos ochenta años, comentó Maxwell sobre la dificultad de convencerse uno de que tales magnitudes puramente matemáticas son apropiadas para la comparación con medidas experimentales. En el tipo particular de media fásica recomendada por él, todo movimiento permitido posee la misma energía, y todos los movimientos tales son igualmente probables. Sugirió que un sistema mecánico complicado, abandonado a sí mismo, eventualmente asumiría casi todas las configuraciones compatibles con su energía asignada. Si concebimos el movimiento como una curva, sería esta curva tan tortuosa como para ocupar, en un instante u otro, casi todos los puntos sobre la superficie formada por el conjunto de sus configuraciones admisibles (fig. 126). Para tal movimiento, el

---

30 Para una exposición más completa del problema ergódico, con referencias detalladas a las fuentes originales y una elaboración ulterior de las ideas de Khinchin, véanse mis conferencias de 1960, "The ergodic problem in classical statistical mechanics", págs. 21-56 de *Ergodic Theory*, Academic Press, 1962.

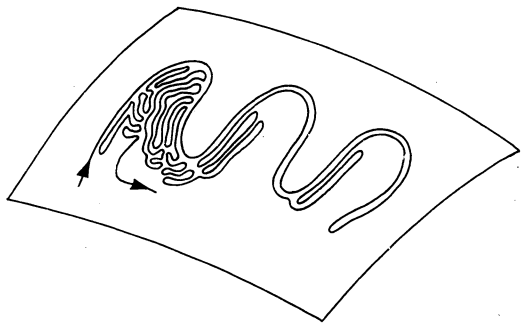


Fig. 126. Esquema para sugerir el movimiento ergódico

comportamiento medio de un sistema dado durante un tiempo muy largo sería igual al promedio de todas las configuraciones admisibles en cualquier instante dado:

$$\textit{Media temporal} = \textit{Media fásica.}$$

Más tarde se demostró que era imposible un movimiento del tipo concreto propuesto por Maxwell, pero quedaba la posibilidad de que, no obstante, fuera cierta su conclusión final.

El *problema ergódico,* como llegó a llamarse el problema de demostrar esta conjetura, atrajo la atención de muchos matemáticos, siendo por fin resuelto en la década de los años treinta. En lo que respecta a la mecánica, la conclusión fue negativa. Se obtuvo una condición para que las medias temporales fuesen *exactamente* iguales a las medias fásicas, para *todas las magnitudes* y para *todas* las maneras de poner en movimiento al sistema, *salvo aquellas que fueran totalmente improbables.* Esta condición era inapropiada al problema mecánico y no se podía razonablemente esperar que se cumpliese. Así pues, aunque de esta idea se desarrolló una extensa e interesante parte de la matemática pura, no se produjo ningún progreso en mecánica.

En todo caso, el tipo de media introducido por Maxwell, que después se llamaría media *microcanónica,* normalmente no podía evaluarse por razones de dificultad matemática. Ya antes de la obra de Maxwell, Boltzmann había propuesto otra clase de media fásica que posteriormente se llamaría media *canónica.* Esta clase de media no se apoya en ningún principio o concepto mecánico. Por el contrario, la razón de su existencia es la sencillez matemática: Tomando medias canónicas, una persona paciente puede obtener respuestas; de hecho, desde la introducción de la media canónica hasta nuestros días, virtualmente toda la mecánica estadística explícita, tal y como se aplica a la física y química, se ha basado en ella. Actualmente hay muchos científicos dispuestos a comparar medias canónicas con medidas experimentales, las hallan válidas, y así, por verificación directa, aceptan la teoría basada en las mismas. Esto no fue en absoluto la idea de Boltzmann. El intentó *demostrar* que a medida que se hace muy grande el número de moléculas en el sistema,

$$\textit{Media micro-canónica} \sim \textit{Media canónica.}$$

Varias veces pretendió Boltzmann haber logrado demostraciones analíticas de esta conclusión, llamada la *ley de Boltzmann.* Una de éstas se repite a menudo en los cursos actuales, pero, al igual que las demás, está mal fundamentada. Tal fue la inseguridad de la conclusión, que Gibbs ni siquiera la mencionó en su texto sobre mecánica estadística. Durante la década de los años veinte, Darwin y Fowler consiguieron dar una demostración satisfactoria, si bien un tanto difícil.

Fue ésta la situación cuando en 1946 tomó interés en el asunto el matemático ruso A. Y. Khinchin. Lo primero que hizo éste fue dar una nueva demostración, algo más sencilla, de la ley de Boltzmann, siguiendo líneas más próximas a las ideas de la teoría clásica de la probabilidad. Si fuera esto todo, no lo mencionaría aquí, pero el caso es que fue un preliminar esencial para su resolución de un problema mucho más profundo, el verdadero problema ergódico de la mecánica estadística.

Mirando atrás al problema ergódico, se dió cuenta Khinchin de que habían pedido demasiado los matemáticos de los años 30. En primer lugar, habían exigido que la media temporal fuese exactamente igual a la media fásica, mientras que para la mecánica sería suficiente que el error fuera pequeño. En segundo lugar, habían exigido que la igualdad se mantuviese con la excepción únicamente de los casos totalmente improbables, aunque bastaría que fueran exceptuados todos los casos bastante imrpobables. En tercer lugar, habían exigido que se mantuviese la igualdad para todo tipo de magnitud que pudiera promediarse, mientras que de hecho, sólo una clase limitada de magnitudes son apropiadas para promediarse en un sistema mecánico. La tercera consideración dio la pista verdadera. Una magnitud que tiene *casi el mismo valor* para todas las configuraciones posibles tendrá desde luego una media temporal prácticamente constante para un sistema dado. Es casi trivial observar que, para tal magnitud, la media fásica y la media temporal son prácticamente iguales. Pero de lo que Khinchin fue aparentemente el primero en darse cuenta es que la propia ley de Boltzmann implica que las magnitudes a promediar son de hecho casi constantes en la mayoría de las configuraciones posibles. A continuación, volvió a su demostración de dicha ley, afinándola con el fin de estimar el error medio. Con esta estimación, pudo entonces establecer el principio ergódico según las líneas que acabamos de indicar:

$$\textit{Media temporal} \sim \textit{Media micro-canónica} \sim \textit{Media canónica}$$

Según mostró Khinchin de manera muy elegante, la demostración de la segunda etapa de esta secuencia incluye como sub-producto la de la primera. El resultado de Khinchin, en pleno, puede enunciarse del modo siguiente: *Los casos donde la media temporal difiere muchísimo de la media canónica, a medida que se va aumentando el número de moléculas en el sistema, se vuelven de probabilidad arbitrariamente pequeña.* Percibimos en este enunciado otra diferencia con respecto a la teoría ergódica, la cual es tan aplicable a dos canicas en una caja como a un sólido con billones de moléculas: el resultado de Khinchin, al igual que la ley de Boltzmann, es un teorema apropiado tan sólo a sistemas complicados y numerosos.

Ha sido poco apreciado este brillante éxito de Khinchin. Por un lado, la mayoría de los físicos han perdido interés en el problema. Por otro, los matemáticos formados en la teoría ergódica encuentran el caso demasiado particular para ser de interés. En mi opinión, el análisis de Khinchin es una de las obras maestras de la mecánica racional, plenamente justificativo del punto de vista original de Boltz-

mann[31]. Demuestra que cada vez que calcula un químico la energía libre canónica, de hecho calcula, para todos los casos salvo los absolutamente improbables, la energía libre media en un sistema de energía total fija abandonado a sí mismo durante mucho tiempo.

11. La relacion entre teorias estadisticas y teorias de medios continuos

Si bien el análisis anterior se refiere a sistemas en equilibrio estadístico, la mecánica estadística de medios deformables proporciona problemas aún más fascinantes. Hasta hace poco, la mecánica estadística de fluidos, por ejemplo, se consideraba como diferente y se suponía más precisa que las teorías que representan a los fluidos como contínuos. El que esto no es cierto lo demostraron en 1950 Jack Irving y John Kirkwood[32], de Pasadena. Contribuyeron ellos la idea fundamental, pero su demostración no era del todo satisfactoria, y su enfoque no tan general como podría haber sido; en 1955, un tratamiento mejor fue dado por Noll[33], que trabajaba en Berlín por aquel entonces. A continuación se resumirá la forma suya del resultado. Dado cualquier conjunto de moléculas, sean iguales o diferentes unas de otras, pocas o numerosas, libre o sometidas a cualesquier fuerzas exteriores o fuerzas de interacción, considérese una selección de probabilidad según cualquier regla admisible. Entonces mediante medias fásicas apropiadas, es posible definir velocidad media, fuerza interna media, energía interna media, flujo medio de energía, de tal manera que *satisfagan exactamente las ecuaciones de campo para materiales continuos.* Así, quedan unidas la mecánica estadística y la mecánica de campos. Considerando a un fluido o un sólido como un conjunto de moléculas, es imposible derivar nada que esté en contradicción con la imagen de la materia como continua. Recíprocamente, no hay nada en la imagen de la materia como un medio continuo que no sea también accesible a una representación molecular. Con esta bella unificación de las dos aparentemente opuestas concepciones de la materia, cierro la relación de ejemplos.

12. Apologia

Lo que he presentado muestra la potencia y la variedad de la moderna mecánica racional. Puede que ustedes esperen que les diga que estos logros son tan sólo una parte de los grandes triunfos que se han conseguido; la realidad no es así. Ciertamente, tardaría más tiempo en describirles la obra de T. Y. Thomas sobre las trayectorias

---

31 *Nota añadida para la reimpresión.* Aunque no ha disminuido desde 1956 la admiración que siento por la obra de Khinchin, ya no me parece que justifique el punto de vista de Boltzmann porque eso es imposible. El enfoque boltzmaniano presupone tácitamente que existe una entidad tal como *la* probabilidad, y no simplemente una probabilidad arbitraria. El refinamiento de Khinchin saca a relucir el conjunto de sucesos (trayectorias) de probabilidad pequeña que han de despreciarse con el fin de obtener un resultado específico. No obstante, permanece la arbitrariedad de la probabilidad con respecto a la cual son improbables estos sucesos. Los cultivadores de la moderna teoría de probabilidades reconocen el desafío y se enfrentan con él de modo directo diciendo que todo el mundo estima probabilidades, etc.

32 J. Irving & J. G. Kirkwood, "The statistical mechanical theory of transport processes, IV, The equations of hydrodynamics", *J. Chem. Phys.* 18, 817-829 (1950).

33 W. Noll, "Die Herleitung der Grundgleichungen der Thermomechanik aus der statistischen Mechanik", *J. Rational Mech. Anal.* 4, 627-646 (1955).

de los sistemas dinámicos y sobre la estabilidad de las ondas de choque, de Ringleb, Tollmien, y Friedrichs sobre flujos gaseosos trans-sónicos, de Neményi y Prim sobre flujos gaseosos rotacionales, de Hicks, Prim y Ericksen sobre las líneas de corriente de flujos gaseosos, de Lavrentiev, Gilbarg, y Serrin sobre flujos de agua delante de cavidades, de Einstein, Bose, y Hlavaty sobre las nuevas teorías del campo unificado, de E. Hopf sobre turbulencia, de Toupin sobre dieléctricos elásticos, unos estudios ulteriores sobre vorticidad, y varias otras cosas. Sin embargo, no sería muy larga la lista.

Verdaderamente, habré de concluír con una disculpa por la mecánica racional. No es probable que se convierta en un campo popular. No se entregan premios por mecánica racional, y daría ésta un triste resultado en una encuesta del público o de los científicos en general. El coste monetario de un siglo de mecánica racional no igualará lo que se gaste tan sólo este año en máquinas computadoras. El trabajo que he descrito aquí se hizo lentamente, por individuos trabajando solos o si acaso con alguien más de gustos similares. Los grandes equipos que producen las bombas y las vacunas no habrían multiplicado ni profundizado los resultados obtenidos aquí. En una edad y en un país donde predomina el número, el coste, y la estadística, nunca conseguirá la mécanica racional que se le preste mucha atención. La atención en sí no es lo que nos hace falta, pero el caso es que hoy en día aquel que pasa desapercibido es probable que no sobreviva. La ayuda financiera en mecánica racional es en una escala tan pequeña que con frecuencia ni siquiera se le reconoce, apoyándose, por el contrario, a proyectos más costosos y más deslumbrantes. Tanto dentro de las universidades o fuera de ellas, varias de las personas que he mencionado aquí esta noche carecen de una buena biblioteca, servicios de mecanografía, e incluso artículos de papelería en cuantía suficiente, por no mencionar una cantidad razonable de tiempo libre de responsabilidades comunitarias o de enseñanza en que poder llevar a cabo sus investigaciones. No hay ninguna sociedad para la mecánica racional, ni es probable que sus estudiosos individualistas sean jamás lo bastante numerosos como para poder financiarla, ni lo bastante cooperativos como para establecerla, caso de poderlo hacer. En la Academia Nacional de las Ciencias, durante por lo menos veinticinco años, no se ha elegido ningún miembro por progresos en mécanica racional.

En cuando a costes y números, ha habido poca variación. No sería nada correcto suponer ni que la mecánica "clásica" que actualmente aprendemos como el primer paso en física y en la ingeniería fuera producido por un esfuerzo cooperativo de la ciencia organizada, ni que no existieran los grandes proyectos en aquellos tiempos de antaño. Desde luego que se gastó dinero en la ciencia hace 200 años: en el cálculo de grandes tablas numéricas, en extensos experimentos en pro de la mejora de la humanidad, en el diseño de buques de guerra, en consejos y comités para organizar la ciencia. Pero estos esfuerzos no dieron como resultado la mecánica "clásica"; fue ésta la obra de un puñado de hombres, dispersos sobre un continente y a lo largo de un siglo: voluntariosos, intransigentes, pendencieros, arrogantes, y creadores.

Así pues, he venido ante ustedes con un propósito. De aquí a unos años, cuando los iniciados de esta noche sean decanos y vice-presidentes, bien puede suceder que las personas cuyos nombres he mencionado estén jubiladas o mental si no corporalmente muertos. Yo les pido a esos decanos y vice-presidentes que, recordando lo que yo he dicho esta noche, den una oportunidad al extraño y arrogante joven sin laboratorio ni máquina computadora que pretende ser capaz de hacer investigación en mecánica simplemente pensando.

NOTA BIBLIOGRAFICA

Esta conferencia se leyó el 16 de mayo de 1956, en la ceremonia de iniciación de la sociedad Sigma XI de la Universidad Estatal de Iowa, Iowa City. Una versión ligeramente corregida apareció en *Science* **127**, 729-739 (1958). Doy aquí las gracias a la American Association for the Advancement of Science por su permiso para volver a imprimir el artículo, pero he preferido emplear mi texto original. Las notas de pie de página son en esencia las que se publicaron en *Science*, con algunas referencias más recientes y varios comentarios añadidos. No reflejan éstos la temática casi enteramente distinta que escogería si hoy fuera a escribir un artículo con este título.

INDICE ONOMASTICO

Abel, Niels Henrik (1802-1829), 288.
Ackeret, Jakob (1898-), 211.
Airy, George Biddell (1801-1892), 167.
Alberti, León Battista (1404-1472), 59.
Alessio, Giovanni (1909-), 24.
Alhazen (965-1020), 56-59.
Amontons, Guillaume (1663-1705), 267.
Andrade, Edward Neville da Costa (1887-), 252.
Antonello da Messina (1430?-1479), 62.
Arconati, Luigi María (c. 1600-después de 1643), 39, 78, 88.
Aristóteles (a. de J. C. 384-322), 36-37, 42-43, 45, 81, 281.
Arquímedes (a. de J. C. 287-212), 34, 37, 43, 52, 97, 110, **184-185**, 199, 283.
Arredi, Filippo (1905-), 82.

Bach, Juan Sebastián (1685-1750), 99.
Bacon, Francis (1561-1626), 85.
Baker, Marshall, 324.
Bateman, Harry (1882-1946), 292, 293.
Battisti, Carlo (1882-), 22.
Bause, Johann Friedrich (1738-1814), 194.
Beeckman, Isaac (1570-1637), 147.
Belliard, Zéphirin Félix Jean Marius (1798-después de 1843), 221.
Bellini, Giovanni (1430-1516), 62.
Berlioz, Louis Héctor (1803-1869), 171.
Bernoulli, Daniel (1700-1782), 91, 107, **108-113, 118**, 120, 126, 127, 143, 151, 154, 157, 164, **205-211**, 229, 231, 234, **236, 238, 244**, 248, **256-261**, 264, 267-269, 273, 275, 276, 290, 295, 301, 302.
Bernoulli, Jaime (Jakob) (1655-1705), 91, 100, **102-103, 105-106**, 112-113, 116, 124-125, 131, 143, **150-151, 154-155** 157, 165, 168, 173, **189, 193, 196-199**, 205, 217, **231-235**, 243, 248, 250, 252, 276, 284, 290, 298, 301.
Bernoulli, Jaime (Jakob) II (1758-1789), 120.
Bernoulli, Juan (Johann) (1667-1748), 91, 100, **103-104**, 107-108, **112**, 113, **120-121**, 143, 151, 154, 157, 164, 193, **210-212**, 236, 248, 252, 254, 276, 290, 301.
Bernoulli, Juan (Johann) III (1744-1807), 124.
Bernoulli, Nicolás (Nikolaus) (el Mayor) (1662-1716), 102.
Berryman, J. P., 259.
Biot, Jean-Baptiste (1774-1862), 224, 241.
Birkhoff, George David (1884-1944), 169.
Boltzmann, Ludwig (1844-1906), 275, 328-329.
Borda, Jean Charles (1733-1799), 111, 167.
Bordoni, Piero Giorgio (1915-), 318.
Borelli, Giovanni Alfonso (1608-1679), 297.
Born, Max (1882-), 315.
Boscovich, Roger John (1711-1787), 163, 261.
Bose, Satyendranath N. (1894-), 331.
Boswell, James (1740-1795), 50.
Boussinesq, Valentin-Joseph (1842-1929), 316.
Boyle, Robert (1627-1691), 252, 254, 259.
Bradwardine, Thomas (c. 1290-1349), 45.
Brewster, David (1781-1868), 169.
Brush, Stephen G. (1935-), 259, 279.
Bülffinger, Georg Bernhard (1693-1750), 198.
Buridan, Jean (c. 1300-después de 1357), 41-42, 44, 297.

Carathéodory, Constantin (1873-1950), 173.
Cardano, Girolamo (1501-1576), 44, 52.
Carnot, Nicolás Léonard Sadi (1796-1832), 296.
Carraci, familia de los (1555-1602), 67.
Carusi, Enrico (1878-), 39, 78.
Casale, Giovanni da († 1346-1375), 42.
Castagno, Andrea dal (1423-1457), 65, 67.
Catelan, l'Abbé de (c. 1675-después de 1710), 231.
Cauchy, Augustin-Louis (1789-1857), 125, 143, 165, 168, **175-183**, 217, 220, **221-222**, 243, 249, 276, 281, 286, 292, **294-295, 325.**
Cellini Benvenuto (1500-1571), 86.
Carlos II de Inglaterra (1630-1685), 169.
Child, J. M., 261.
Chladni, Ernst Florens Friedrich (1756-1827), 33, 120.
Cisotti, Umberto (1882-1946), 52.
Clagett, Marshall (1916-), 41-42, 44, 45, 88, 303.
Clairaut, Alexis Claude (1713-1765), 111, **127**, 143, 185, **202-205.**
Clausen, Thomas (1801-1885), 284.
Clausius, Rudolf Julius Emmanuel (1822-1888), 264, 275, 298, 300.
Cohen, I. Bernard (1914-), 140, 173-174, 303, 305.
Cohen, Morris Raphael (1880-1947), 281.
Coleman, Bernard David (1930-), 167, 293, **300-301**, 302-303, 324.

Congreve, William (1670-1729), 169.
Cooper, Lane (1875-1959), 303.
Coriolis, Gustave Gaspard (1792-1843), 127.
Cotter, Bárbara (Mrs. Morrison) (1924-), 326.
Coulomb, Charles Augustin (1736-1806), **124-125, 219-222.**
Crosby, Henry Lamar, Jr. (1916-), 41.

Dédalo, 68.
D'Alembert, Jean Le Rond (1717-1783), 95, 97, 98, **112-114, 118-122,** 130, 143, 150-151, **153-154,** 157, 164-165, 167, 210, **211, 213-215,** 224, 228, 230-231,

D'Arcy, Patrick (1725-1779), 229-230.
Darwin, Charles Galton (1887-), 329.
Davy, Humphry (1778-1829), 236-266.
Davy, John (1790-1868), 266.
Delpech, François Séraphin (1778-1824), 247.
Demócrito (a. de J. C. c. 460-370), 252.
Descartes, René (1596-1650), 93, 96, 100, 106-107, 113, 140, 150, 254, 297-298.
Diderot, Denis (1713-1784), 119.
Dijksterhuis, Eduard Jan (1892-1965), 184.
Dirichlet, Peter Gustav Lejeune (1805-1859), 129.
Drabkin, Israel Edward (1905-), 281.
Dryden, Hugh Latimer (1898-), 303.
Du Bois-Raymond, Paul David Gustav (1831-1889), 259.
Dugas, René (1897-1957), 133, 174, 229, 304-305.
Duhem, Pierre (1861-1916), **37-42,** 50, 88, 91, 299.
Dumbleton, John of († 1338-1348), 41.

Einstein, Albert (1879-1955).
Enestrom, Gustav (1852-1923), 236.
Ercole di Roberti (c. 1456-1496), 64, 67.
Ericksen, Jerald Laverne (1924-), 243, 250, 286, 292, 294, 302-303, 322, 324, 326, 331.
Ertel, Hans Richard Max (1904-), 313.
Euclides (a. de J. C. c. 350), 21, 34, 52, 134.
Euler, Leonhard (1707-1783), 94, 100, 101, **107-110, 113-132,** 133, 143, **154-165,** 167, 169, 173-174, 178, **182-183, 200, 205,** 211, 213, **214-218, 220,** 222, 226, 229, 230-231, **234-243,** 248-249, 250, **254-256,** 260-261, 266-267, 269, 276, 280-281, 283, 284-286, 290, 292, 294-295.

Faraday, Michael (1791-1867), **171-172,** 275.
Favaro, Antonio (1847-1922), 39, 78.
Feldhaus, Franz María (1874-1957), 20.
Fermat, Pierre de (1608-1665), 35, 129.
Ferrari (1522-1565), 52.
Fibonacci, Leonardo (1170-1250), 52.
Fior, Antonio († c. 1535), 52.
Fleckenstein, Joachim Otto (1914-), 129.
Fourier, Joseph (1768-1830), 143, 177.
Fowler, Ralph Howard (1889-1944), 329.
Francisco I de Francia (1494-1547), 86.
Federico II de Prusia (1712-1786), 100.
Fresnel, Augustin Jean (1788-1827), 181, 222, 286.
Freud, Sigmund (1856-1939), 36.
Friedrichs, Kurt Otto (1901-), 331.
Froude, James Anthony (1818-1894), 200.
Fuss, Paul-Heinrich (1797-1855), 236.

Galeno († 2.° siglo d. J. C.), 302.
Galileo Galilei (1564-1642), 31, 32, 37, 39, 41, 44, 50, 85, 91, 93-94, 98, 99-100, 108, 124, 139, 147, 150, 165, 170, 189-**192,** 204, 229, 248, **281-282,** 297.
Gassend, Pierre (1592-1655), 298.
Gentileschi, Orazio (1563-1647), 67.
Giacomelli, Raffaele (1878-), 68.
Giambologna (1529?-1608), 67.
Gibbs, Josiah Willard (1839-1903), 143, 299, 308, 329.
Gibbs-Smith, Charles Harvard (1909-), 73.
Gilbarg, David (1918-), 331.
Gilbert, Davies (1767-1839), 263.
Giotto di Bondone (1276?-1337), 63, 67.
Goldberg, Rube (Reuben Lucius) (1883-), 18.
Goldbach, Christian (1690-1764), 206.
Goldscheider, Ludwig (1896-), 51.
Gombrich, Ernst Hans Josef (1909-), 88.
Goya y Lucientes, Francisco José de (1746-1828), 51.
Grad, Harold (1923-), 250.
Green, Albert Edward (1912-), 301, 326.
Green, George (1793-1841), 143, 171.
Griffith, Byron Alexander (1908-), 225, 295.
Groot, Jan Huig (Cornets) de (1554-1640), 282.
Grooth, Johann Nikolaus (1721 ó 1723-1797), 109.
Grotius (Huig de Groot) (1583-1645), 282.
Guittone D'Arezzo (995?-1050), 24.
Gurtin, Morton Edward (1934-), 167, 301.

Hadamard, Jacques (1865-1963), 169, 177, 234.
Händel, Georg Frideric (1685-1759), 99.
Hagen, Gotthilf Heinrich Ludwig (1797-1884), 293.
Haid, Johann Jakob (1704-1767), 104.
Halley, Edmund (1656 -1724), 135.
Hamel, Georg (1887-1954), 306.
Hamilton, William Rowan (1805-1865), 89, 131, 292.

Handmann, Jakob Emanuel (1718-1781), 115.
Hart, Ivor Blashka (1889-), 39.
Haskell, Francis James Herbert (1928-), 171, 174.
Heath, Thomas Little (1816-1940), 184.
Hellinger, Ernst (1883-1950), 315.
Helmholtz, Hermann Ludwig Ferdinand V. (1821-1894), 143, **310-313.**
Herapath, John (1790-1869), **261-266,** 269, 273, 275, 277.
Herapath, Spencer D., 262.
Herivel, John W., 227.
Hermann, Jakob (1678-1733), 103, 198, 252-253, 256, 260, 266, 269, 275, 279.
Herodoto (a. de J. C. c. 484-c. 425), 276.
Herón de Alejandría (situado de modo muy diverso entre el S. III a. de J. C. y el S. II d. de J. C.), 24.
Hertz, Heinrich Rudolf (1857-1894), 170.
Heytesbury, William († 1330-1348), 41.
Hicks, Bruce Lathan (1862-1943), 331.
Hilbert, David (1862-1943), 169, 171, 173, 306.
Hill, John Edward Christopher (1912-), 169, 174.
Hitler, Adolf (1889-1945), 51.
Hlavatý, Václav (1894-), 331.
Hooke, Robert (1635-1703), 103, 146-147, 204, 217, 252, 290, 295.
Hopf, Eberhard (1902-), 331.
Houston, William Vermillion (1900-), 225, 238, 240.
Hubert, Johann Rudolf (1668-1748), 104.
Hugoniot, Pierre Henri (1851-1887), 177.
Huygens, Christiaan (1629-1695), 31, 71, 93, 103, **105,** 108, 111, 116, 126, 132, **144,** 147, 150, 151, 154, 157, 173, 178, 200, 204, 227, 231, 248, 252, 290, **297-298,** 302.

Ibn-Al-Haitham (965-1020), 56, 60.
Irving, Jack Howard (1920-), 330.
Isidoro de Sevilla (560?-636), 87.
Jacopone da Todi (1230?-1306), 24.
Joos, Jakob Christof Georg (1894-), 223-225, 241.
Jordanus de Nemore (fl. antes de 1260), 41, 44.
Jouguet, Jacques Charles Emile (1871-1943), 133, 174, 229, 231.
Joule, James Prescott (1818-1889), 266-267, 269, 275, 279.
Juan el Gramático (Ioannes Philoponos) (fines S. V - primeros S. VI), 41-42, 45, 281-282.

Kelland, Philip (1808-1879), 167.
Keller, Joseph Bishop (1923-), 284, 303.
Kelvin, véase Thomson.
Kepler, Johann (1571-1630), 93-94, 294.
Khinchin, Aleksandr Yakolevich (1894-1959), 329.
Kirchhoff, Gustav (1824-1887), 143, 248.
Kirkwood, John (1907-1959), 330.
Kneller, Godfrey (1646-1723), 90.
Kotchine (Kochin), Nikolai Evgrafovich (1901-1944), 177-178.
Koyré, Alexandre (1892-1964), 140, 305.
Krönig, August Karl (1822-1879), 268-269.

Lagrange, Joseph-Louis (1736-1813), 37, 89, 91, 96, 113, **118,** 122, 124, **128, 129-133,** 150, **165-167,** 169, **228-230,** 234, 240, 243, 248, **283,** 301.
Lamb, Horace (1849-1934), 288, 303.
Lamé, Gabriel (1795-1870), 280.
Laplace, Pierre Simon de (1749-1827), 130, 136, 167.
Lavrentiev, Mikhail Alekseevich (1900-), 331.
Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646-1716), 18, 59, 95, 101, 103, **107,** 110, 113, 118, 124, 129, 147, 150, 172-173, 193, **194-195, 198,** 205, 252, 276, 295, 297.
León X (1475-1521), 33.
Leonardo da Vinci (1452-1519), **17-36,** 42, **43-88,** 297.
Leoni, Ottavio Mario (Leoni de'Marsari) (1578-1630), 190.
L'Hospital, Guillaume François de (1661-1704), 234.
Lomosonov, Mikhail Vassilevich (1711-1765), 261.
Lorentz, Hendrik Antoon (1853-1928), 170.
Lorenzo di Credi (1459-1537), 62.
Love, Augustus Edward Hough (1863-1940), 283.
Lubbock, John William (1803-1865), 273.

MacCurdy, Edward Alexander Coles (1871-), 24, 51, 71.
Mach, Ernst (1838-1916), 36, 37, 89-92, 95-96, 97-98, 100, 113, 136, 160, 174, 178, 229, 248-249, 281.
MacLaurin, Colin (1698-1746), 111, 143, 204.
Magie, William Francis (1858-1943), 259.
Manuel, Frank Edward (1910-), 169, 174.
Maquiavelo, N. (1469-1527), 276.
Marcolongo, Roberto (1882-1943), 39, 50, 52, 56, 61.
Marinoni, Augusto, 21.
Mariotte, Edmé (1620-1684), 103, 124, 231.
Martini, Francesco di Giorgio (1439-1501), 18-20, 88.
Marx, Karl (1818-1883), 134.
Masaccio (Tommaso Guidi) (1401-1428), 66-67.

Maupertuis, Pierre-Louis-Moreau de (1698-1759), 35, 111, 129.
Maurin, Nicolás Eustache (1799-1850), 247.
Maxwell, James Clerk (1831-1879), 149, 168-169, 171, 178, 264, **275**, 326, 327-328.
McKinsey, John Charles Chenoweth (1908-1953), 225.
Mendoza, Eric, 267, 279.
Mersenne, Marin (1588-1648), 108, 147, 282, 303.
Mikhailov, Gleb Konstantinovich (1929-), 154, 206.
Millikan, Robert Andrews (1868-1953), 268.
Mises, Richard v. (1883-1953), 315-317.
Mizel, Victor Julius (1931-), 301.
Montaigne, Michel Eyquem de (1533-1592), 276.
Moody, Ernest Addison (1903-), 41, 44.
Moran, John P. (1934-), 282.
Musschenbroek, Pieter van (1693-1761), 123, 132.

Napoleón Bonaparte (1769-1821), 51.
Navier, Claude-Louis-Marie-Henri (1785-1836), 143, 181, 288-289, 292-293.
Neményi, Paul Félix (1895-1952), **88**, 331.
Netscher, Kaspar (1639-1684), 144.
Newton, Isaac (1643-1727), 18, 34-35, 43, 50, 71, **89-96**, 98, **100-101**, 105-108, 110-111, 113-114, 116-117, 126, 131, **134-143**, 147, 150-151, 154, 157, 160, 165, **167-173**, 178, **199-204**, 223-229, 231, 234, 240-241, 243-244, 248-252, 254, 263, 276, 288, 295, 297, 301, 305, 308.
Nicolás de Cusa (1401-1464), 98.
Nietzsche, Friedrich Wilhelm (1844-1900), **34**.
Noble, William (?-1681), 108.
Noll, Walter (1925-), **130**, 173, **183**, 248, 288, **292-294**, **300-301**, 302-303, 305, **306**, 317, 324, **326**, 330.
Nostradamus (Michel de Nostre-Dame) (1503-1566), 34, 297.

Ockham, Guillermo de (1300?-1349?), 127.
Oldroyd, James Gardner (1921-), 325.
Oresme, Nicole (1330?-1382), 41-42, 45, 297.
Osgood, William Fogg (1864-1943), 182, 290, 303.

Pacioli, Luca (1450?-1520?), 52, 56.
Palter, Robert (1924-), 174.
Pardies, Ignace Gaston (1636 ó 1638-1673), 130, 145, 147, 150, 189, 193.
Parent, Antoine (1666-1716), 124, **198-199**, 204, 220.
Parsons, William Barclay (1859-1932), 20.
Pascal, Blaise (1623-1662), 82, 189.
Pearson, Karl (1857-1936), 283.
Philoponos, véase Juan el Gramático.
Picasso, Pablo Ruiz (1881-1973), **51**.
Pigot, Thomas (?-1686), 108.
Planck, Max (1858-1947), 300.
Platón (a. de J. C. 427?-347 ó 348), 43, 52.
Plinio (Gaius Plinius Secundus) (23-79), 87.
Poiseuille, Jean-Louis-Marie (1799-1869), 289, 293.
Poisson, Simeon-Denis (1781-1840), 143, 168, 177, 181, **244-247**, 249, 289.
Pólya, Georg (1887-), 284.
Pope, Alexander (1688-1744), 89, 113.
Powell, Baden (1796 ó 1797-1860), 273.
Power, Henry (1623-1668), 252, 254, 259.
Prager, Willy (1903-), 320.
Prim, Robert Clay, III (1921-), 331.

Rafael (Raffaello Sanzio) (1483-1520), 62.
Randall, John Herman, Jr. (1899-), 42, 49-50, 59.
Rankine, William John Macquorn (1820-1872), 177.
Rayleigh, *véase* **Strutt.**
Reiner, Markus (1886-), 320, 322, 324.
Reissner, Max Erich (1913-), **314-315**.
Reti, Ladislao, 18, 21, 73, 88.
Riccati, Jacobo (1676-1754), 129.
Rigaud, Stephen Peter (1774-1839), 169.
Ringleb, Otto Adolf Friedrich (1900-1966), 331.
Rivlin, Ronald S. (1915-), **318-319**, **321**, 324, 326.
Roberval, Giles Person de (1602-1675), 260.
Robins, Benjamín (1707-1751), 211.
Robison, John (1739-1805), 292.
Roller, Duane Emerson (1894-1965), 221.
Roller, Jean (1798-1866), 268.
Russell, Bertrand Arthur William (1872-1970), 97.

Saint Venant, Adhémar-J. C. Barré de (1797-1886), 315-317.
Savart, Félix (1791-1841), 224, 241.
Scheits, Andreas (c. 1655-1735), 194.
Scipione del Ferro (1465-1526), 52.
Segner, Johann Andreas V. (1704-1777), **117**.
Serret, J. Alfred (1819-1885), 283.
Serrin, James Burton, Jr. (1926-), 302, 322, 331.
Settle, Thomas Brackett (1930-), 282.
Shakespeare, William (1564-1616), 50.
Signorini, Antonio (1888-1963), **317-318**.
Smirnov, Vladimir Ivanovich (1887-), 259.
Smith, John (1652?-1742), 90.
Sócrates (a. de J. C. 470?-399), 43.
Sommerfeld, Arnold Johannes Wilhelm (1868-1951), 225.

Soto, Domingo de (1494-1570), 45.
Speiser, Andreas (1885-), 259.
Stein, Howard (1933-), 174.
Sternberg, Eli (1917-), 317.
Stevin, Simon (1548-1620), 34, 110, 147, 149, 185-188, 199-200, 282.
Stokes, George Gabriel (1819-1903), 143, 177-178, 264, 273, 276, **288-289**, 292-294, 303.
Strutt, John William, Baron Rayleigh (1842-1919), 273, 275, 321.
Sugar, Alvin C., 225.
Suppes, Patrick Colonel (1922-), 225.
Svantesson, Sven, 302, 303.
Swift, Jonathan (1667-1745), 99-100, 122.
Swineshead, Richard († 1344-1355), 41.
Synge, John Lighton (1897-), 225, 295.

Tait, Peter Guthrie (1831-1901), 248, 252.
Tartaglia, Niccolò (1499?-1577), 52.
Taylor, Brook (1685-1731), 108, 112, 114, 143, 151-152, 200, 204.
Thomas, Tracy Yerkes (1899-), 326, 330.
Thomson, William, Lord Kelvin (1824-1907), 143, 248, 261, 267, 273, **312-313**.
Tiziano (Tiziano Vecelli) (1477-1576), 62.
Tollmien, Walter Gustav Johannes (1900-), 331.
Torricelli, Evangelista (1608-1647), 199.
Toupin, Richard A. (1926-), 225, 249, 300, 302, 305, 317, 331.
Towneley, Richard (1629-1705), 252, 254, 259.
Tredgold, Thomas (1788-1829), 261.
Truesdell, Clifford Ambrose, III (1919-), 31, 87-88, 133, 213, 222, 225, 241, 248-249, 251, 261, 264, 279, 283, 286, 288, 294, 300, 302, 303-304, 305, 317, 324, 326, 332.

Uccelli, Arturo (1889-), 31, 39, 44, 88.

Valéry, Paul Ambroise (1871-1945), 36.
Valla, Lorenzo (1406-1457), 282.
Van der Waerden, Barthel L. (1903-), 97, 248.
Varignon, Pierre (1654-1722), 71, 147-148, 198.
Vasari, Giorgio (1511-1574), 33, 61-62, 67, 86-87.
Venturi, Giovanni Battista (1746-1822), 37.
Villard d'Honnecourt († c. 1250), 76.
Vindelic, Aug. († 1741-1742), 104.

Wagner, Wihelm Richard (1813-1883), 51.
Waterston, George, 270.
Waterston, John James (1811-1883), **269-276**, 279.
Waterston, Robert, 270.
Watson, Earnest Charles (1892-), 268.
Weems, Mason Locke (1759-1825), 168.
Weinberger, Hans Félix (1928-), 283.
Weissenberg, Karl (1893-), 323.
White, John Edward Clement Twarowski (1924-), 61, 88.
Wohlwill, Emil (1835-1912), 91.

Young, Thomas (1773-1829), 123, 205, 264, 281, 290, 292.

Zammattio, Carlo, 84.
Zaremba, Stanislaus (1863-1942), 294, 325-326.
Zemplén, Gyözö (1883-), 177.

INDICE DE MATERIAS

Nota: Para materias específicamente asociadas con alguna persona, vg. la "mecánica de Newton", véase el Indice Onomástico, en especial, las páginas citadas en letra negrita.

Academias de Ciencia, 261-266, 271-272, 276-277, 302, 331.
Acción a distancia, *véanse* Atracción, Fuerzas mutuas.
Aceleración, *véanse* Caída libre, Fuerza inercial, Merton College, teoremas cinemáticos de.
Aceleraciones invertidas, *véase* Fuerza inercial.
Aire (*véase también* Teoría cinética de los gases), 68-73, 189.
Algebra, 52, 99, 107.
Alhazen, problema de, *véase* Optica.
Arbitraje Secreto, 271, 273, 276.
Areas, principio de, *véase* Cantidad de movimiento, momento de.
Aristóteles, aristotélico, *véase* Mecánica peripatética.
Arte, 50-51, 61-68.
Atomos, atomismo (*véase también* Teoría cinética de los gases), 98, 168, 173, 260-261, 330.
Atracción gravitacional, 136-138, 163.
Axiomas (*véase también* Newton, leyes de), 170, 173, 248-250, 295, 306.

Barras (*véanse también* Vigas, Elástica), Vibración de, 31, 108-110, 116, 123, 164, 205.
Bernoulli-Euler, teoría de varillas de, *véase* Elástica.
Bernoulli, teorema hidráulico de, 111-112, 154, 205-212.
Boyle, ley de, 254, 259.

Caída libre, 45, 281-282, 297.
Cálculo infinitesimal, 97, 185, 302.
Calor,
  Equivalente mecánico del, 271.
  Teoría mecánica del, 268-269.
  Teorías vibratorias y calóricas del, 263, 271.
Camino Libre medio, 275.
Campos, 111, 120-121, 330-331.
Campos de velocidades, 120, 211-216.
Cantidad de movimiento (*véanse también* Euler, leyes del movimiento de, Inercia, Momento lineal).
  Integrales de, 113, 130, 226, 228-230, 236.
  Momento de, 125-127, 130, 164, 183, 217, 223-251.
Catenaria, 31, 103, 129, 150.
Catenaria generalizada, *véase* Sistemas flexibles.
Cauchy, leyes del movimiento de, 175-178, 220.
Causas, 93, 113, 172.
Centro de masa, 126, 130.
Centro de oscilación, *véase* Cuerpo rígido, movimiento del.
Centroides, 53-58.
Cero absoluto, 264, 267, 270.
Ciéncias, *véanse* Experiencia, su papel en las Ciencias Naturales, Experimentación, Historia e historiadores de la Ciencia, Enfoque matemático de la Filosofía Natural.
Ciencia "newtoniana y "anti-newtoniana", 167-169.
Ciencia, su naturaleza, 17, 33, 49-50, 81-82.
Ciencia, verdad en la, 140.
Cinemática, 41, 56, 59-61, 68, 121-122, 126.
Circulación, 83-84, 312-313.
Columna, *véase* Elástica.
Continuidad,
  Ley de Leibniz de, 101, 118.
  Principio de, en Hidráulica, 82-83.
Cooperación en la Ciencia, 132, 301, 331.
Coordenadas cartesianas, 112, 113, 116, 160-162, 237, 241.
Coriolis, aceleración de, *véase* Movimiento relativo.
Corpuscular, *véase* Atomos.
Costumbres, malas, 276,
Cuerda vibrante, 108, 110, 114, 116, 118.
Cuerpo (*véase también* Elasticidad, Fluidos, Masa puntual), 95, 126, 139-140.
Cuerpo rígido, movimiento del (*véase también* Inercia).
  en general, 45-46, 47-48, 95, 143, 157-160, 163, 236, 320.
  Centro de oscilación (Péndulo físico), 105, 116, 154, 227-228, 231-236, 297-299.
  Teoría de Euler del, 116-117, 126, 163, 238-241.

D'Alembert,
Paradoja de, *véase* Resistencia de fluidos.
Principio de (según el propio D'Alembert), 113.
Principio de, *véase* Fuerza inercial.
Deformación cortante (cizalladura), 125, 320-321.
Deformación (unitaria), 105, 125, 222.
Democracia social, 278.
Desorganización de la Ciencia, sus virtudes, 276-279, 331.
Desprecio, un síntoma de ignorancia, 302.
Diafragma, *véase* Euler, principio de corte de.
Dinámica, principios de (*véanse también* Newton, leyes de, Euler, leyes de), 41-42, 106-107, 113, 298.
Discontinuidades, 177-178.

Ecuaciones constitutivas, 105, 165, 183, 289, 296, 325-326.
Ecuaciones del equilibrio y del movimiento, *véanse* Fuerzas, Momentos de fuerzas, Movimiento.
Ecuaciones diferenciales, *véanse* Equilibrio, Movimiento.
Ecuaciones "newtonianas", 116, 126, 160-164, 225-226, 238, 244, 248-249.
Efusión (*véase también* Hagen-Poiseuille), 111, 137-143, 167.
Elástica, 85, 103, 123-124, 129, 131, 151-154, 163, 198, 241-243, 283-287.
Elasticidad (*véanse también* Barras, Elástica, Membranas, Placas, Saint Venant, principio de, Principios variacionales).
Teoría lineal general de, 181, 222, 241-242, 314-317, 319.
Teoría no-lineal de, 283-284, 286-288, 299, 317-319.
Elementos estructurales (*véanse también* Barras, Elástica, Membranas, Placas), 26-33.
Energía (*véanse también* Equipartición, Teoría ergódica).
Cinética, 107, 130.
Integral de, 113, 228, 229, 240.
Principio de, 105-107, 150-151, 225, 297.
Almacenada, 300, 315, 318, 324.
Enfoque matemático de la Filosofía Natural, 17, 51-52, 82, 96-99, 132-133, 134-136, 170, 172, 291-292, 300-301, 324-325.
Entropía, 280, 296-297, 298, 300.
Equilibrio, *véanse* Fuerzas, equilibrio de, Momentos, equilibrio de.
Equipartición, 269-270, 272-273.
Errores en Matemática, 134.
Esfuerzo(s) (*véanse también* Presión, Tensión, Tracción).
Medio, 105, 147.
Tensor de, 177, 182, 224.
Esfuerzo (o fuerza) cortante (de cizalladura), 124-125, 183, 199, 220, 222.
Esfuerzo-deformación, relación, *véase* Ecuaciones constitutivas.
Especulación, especulativo, 167-168, 173, 181, 252, 263, 275-277, 306.
Estabilidad, 283.
Estado, ecuaciones de (*véase también* Boyle, ley de), 254-261.
Estilo científico, 278, 290.
Euler,
Ecuaciones de Hidrodinámica de, 121, 182.
Ecuaciones del movimiento para cuerpos rígidos de, 117, 224, 238, 240.
Leyes del movimiento de, 117, 125-126, 160-165, 214, 217, 238-243.
Principio de corte de, 121, 175, 182.
Experiencia, su papel en las Ciencias Naturales, 24, 33, 96, 132-133, 290, 305-306, 324-325.
Experimentación, experimento, 17, 21-26, 68, 96, 101, 122, 132-133, 271, 290, 292-293, 308, 324-325.
Expertos, 50, 279.

Farsantes, 51.
Física (*véase también* Experimentación), en general, 139, 172-173, 306.
No-matemática, 96, 171, 261, 272, 290.
Fluencia, condición de, *véase* Plasticidad.
Fluidos (*véanse también* Aire, Hidráulica, Hidrodinámica, Teoría cinética de los gases, Resistencia, Turbulencia, Viscosidad, Vórtices),
en general, 68-76, 88.
Teorías semimatemáticas de, 94-95, 111, 137-143.
Flujo, *véase* Fluidos.
Forma libre, 284-287.
Frecuencia de vibración, 108-110, 120.
Fuerzas,
Axiomas para, 294-296.
Centrales, 167, 224, 244-246.
de contacto (*véanse también* Presión, Esfuerzo, Tensión, Tracción), 164-165, 168, 193, 200.
en general, 34-36, 61, 95, 113, 116, 169, 173.
Equilibrio de, 103, 106, 124-125, 147-151, 193, 225, 250.
Vivas y muertas, 107.
Fuerza inercial, 106, 113, 130, 139, 150-154, 157, 165, 231-234, 250.
Fuerzas mutuas (*véase también* Atracción),

127, 163, 223, 225-226, 229-230, 236, 243-246.
Funciones isótropas, 140, 199-200, 217.
Funciones potenciales, 127, 129, 204.

Galileo, leyes de, *véanse* Caída libre, Plano inclinado, Merton College, teoremas cinemáticos, de.
Gases, flujos de (*véase también* Teoría cinética de los gases), 331.
Genio, 37, 41, 68, 86.
Geómetras, 96, 308.
Geometría, 52, 56, 59-60, 68, 97-98, 99-100, 130, 170, 305-307.
Gravitación, *véase* Atracción.
Gulliver, los viajes de, 99-100.

Hagen-Poiseuille, fórmula de, 289, 293.
Hamilton, ecuaciones de, 292.
Helicóptero, *véase* Tornillo aéreo.
Helmholtz, teoremas de, *véase* Vorticidad.
Hidráulica, 74, 76-83, 111-112, 154, 205-211.
Hidrodinámica, 120-122, 181-183, 211-217, 331.
Hidrostática, 110-113, 184-189, 199-204, 283.
Hipo-elasticidad, 294, 326.
Historia e historiadores de la Ciencia, 17, 107, 134-136, 137-140, 168-169, 171, 252, 261, 276, 280-282, 290.
Historia, su función, 276, 288, 298.
Hooke, ley de, 103, 146-147, 204.
"Humanidades", 26, 51.
Humanistas del Renacimiento, 43, 86.

Imaginación, 100, 122, 292.
Impetus o impulso de Buridan, 42.
Indiferencia material, 249-251, 294, 325-326.
Inercia (*véase también* Masa),
  Ejes principales de, 117, 157-159, 227.
  en general, 42, 95, 117.
  Momento o tensor de, 103, 116-117, 205.
Ingeniería, 18-21, 26, 132, 316.
Integrales, *véanse* Energía, Cantidad de movimiento.
Intuición (*véase también* Imaginación),
  Física, 140, 200, 217, 298.
  Matemática, 51, 172.
Invariancia, *véase* Indiferencia material.
Irreversibilidad, *véase* Termodinámica.
Isotropía del espacio, *véase* Indiferencia material.

Kelvin, teorema de, *véase* Circulación.

Lagrange, la Méchanique Analytique de, 96, 130-131, 165, 227-230.
Lagrange, las ecuaciones de, 130, 229.
Leibniz, ley de, *véase* Continuidad.
Ligaduras, 112-116, 248.

Mareas, *véase* Olas.
Masa,
  en general, 95, 117, 130.
  Puntual, 95, 108, 168, 228, 231, 234, 240.
Materiales, *véase* Ecuaciones constitutivas.
Matemática (*véanse también* Algebra, Geometría, Cinemática).
  Aplicada, 276, 292, 307.
  en general, 51-52, 171.
  Pura, 82, 132, 282, 292, 298, 302, 307.
Mecánica,
  Analítica, 96, 100, 130-131.
  Cartesiana, 110, 140.
  Celeste, 93, 95.
  Medieval, 36, 39-43.
  Peripatética, 36, 43, 44, 94, 96, 147.
  Racional (*véase también* Enfoque matemático), 98, 100, 132-133, 170, 302, 305-309, 316, 324-325, 330-331.
Mecánico, definición de lo, 169.
Media fásica, 327-329.
Media temporal, 328-329.
Medicina, 301.
Membranas, 118, 154, 165.
Merton College, teoremas cinemáticos de, 41, 45, 297.
Método científico (*véanse también* Enfoque matemático, Razonamiento físico), 33-34, 49-50, 97, 101-102, 290.
Mínima acción, 35, 129.
Moléculas, *véase* Atomos.
Momentos de fuerzas (pares),
  en general, 126, 175, 223, 226, 230, 248-249.
  Equilibrio de, 106, 123, 124-125, 147, 150-151, 157, 220, 222, 225, 231, 234, 250.
Momento lineal ("Cantidad de movimiento", lineal), 95, 107, 130, 154, 214, 238, 243, 297.
Movimiento (*véanse también* Cauchy, leyes de, Euler, leyes de, Newton, leyes de),
  Ecuaciones del, 112-120, 121-122, 125, 160-165, 217-220, 241-243.
  en general, 34-36, 56, 61-62.
  Perpetuo, 35-36.
  Relativo, 127.
  Uniformemente acelerado, *véanse* Caída libre, Plano inclinado, Merton College, teoremas cinemáticos de.
Música, 99-100.

Navier-Stokes, *véase* Viscosidad lineal.

Newton,
el **Principia** de, 92-96, 108, 114, 131, 134-143, 154, 165, 167-168, 169-170, 172, 199, 201.
Leyes del movimiento de, 34-35, 92-93, 117, 136-137, 225-226.
Noll, Principio de, *véase* Indiferencia material.

Olas, ondas (*véanse también* Frecuencia, Sonido, Cuerda) 76-68, 122, 167, 324.
Ondas, ecuación de, *véanse* Cuerda, Sonido.
Operacionalismo, 267, 324.
Optica, 35, 56, 167.
Oscilaciones (*véanse también* Barras, Membranas, Placas, Cuerpo rígido, movimiento del, Sonido, Cuerda), 108-110, 117-118, 131, 147.

Palanca, ley de, *véanse* Euler, leyes del movimiento de, Fuerza inercial, Momentos de fuerzas, Equilibrio de, Cuerpo rígido, movimiento de.
Pandeo, 31, 123-124, 283-284.
Pardies, principio de (*véase también* Tensión), 103, 189-193.
Pares, *véase* Momentos de fuerzas.
Pedagogía, 18, 248, 280-282.
Péndulo,
Compuesto, *véase* Sistemas flexibles.
en general (*véase también* Cuerpo rígido), movimiento del, 154.
Físico, *véase* Cuerpo rígido, movimiento del.
Periodismo, 18, 86-87.
Perspectiva, 61.
Peso, *véanse* Fuerzas, Masa.
Pistón, segmentos de, 286, 288.
Placas, 120.
Plano inclinado, 45-48, 282.
Plasticidad, 326-327.
Platonismo, 43, 282.
Positivismo (*véase también* Operacionalismo), 101, 122, 140.
Premios, Base y Nobel, 266, 302.
Presión,
en Teorías cinéticas, 147, 252-260, 268.
Hidráulica, 111-112, 210-211.
Hidrodinámica (interna), 121, 164, 182, 214, 217.
Principios variacionales (o de Mínimo), 35, 129-130, 151, 299-300, 314-315.
Probabilidad (*véase también* Teorías estadísticas), 268, 275, 289, 327-328.
Problemas particulares, su importancia, 97, 157, 160, 300-301.
Procesos cuasi-estáticos, 280.
Profundidades psíquicas, 17, 61-62.
Progreso, 17, 67, 248, 301.
Puente de suspensión, 145, 147.

Razonamiento físico (*véase también* Intuición física), 256, 282, 298.
Regla de tres, *véase* Relaciones y teorías lineales.
Relaciones y teorías lineales, 46, 83-84, 301-302, 321.
Renacimiento, 37, 43, 86.
Resistencia de fluidos, 73, 94, 120, 137, 139-140, 211.
Revoluciones, 43, 143, 301.
Ríos, *véase* Hidráulica.
Ruptura, 189, 192.

Saint Venant, principio de, 315-317.
Servilismo, servidumbre, 43, 278-279.
Sistemas flexibles (*véanse también* Catenaria, Membranas, Cuerda, Tensión), 108-109, 112-113, 116, 118, 124-125, 147, 151-153, 236-237.
Solidificación, principio de, 185-188.
Sonido, 139, 143, 254, 261.
Stevin, principio de, *véase* Solidificación.
Superposición, principio de, 76-77.

Tecnología, *véase* Ingeniería.
Temperatura en teorías cinéticas, 260-261, 267.
Tensión en un cable flexible, 103, 150-151, 189, 193, 198.
Teoría, su relación con los experimentos, 132-133, 292-293.
Teoría cinética de los gases, 252-279.
Teoría ergódica, 327-330.
Teorías estadísticas (*véase también* Probabilidad), 330.
Termodinámica,
Clásica (*véase también* Termostática), 280, 298.
Necesidad de una teoría general, 301-302.
Teoría de Coleman-Noll de, 301.
Termostática,
Clásica, 280, 296-297.
Teoría de Coleman-Noll de, 300.
Tornillo aéreo, 71-72.
Torsión, 125, 315, 318, 322.
Trabajo, *véase* Energía, Trabajo virtual.
Trabajo en equipo, *véase* Cooperación.
Trabajo virtual, 147, 150, 151, 165-167, 248.
Tracción, vector de (*véanse también* Presión, Esfuerzos, Tensor de), 175, 177, 182, 185, 204.
Turbulencia, 78, 312.

Unicidad, 324.

Vacío, *véanse* Caída libre, Vacío electromagnético.

Vacío electromagnético, 169.
Varilla, *véanse* Barras, Elástica.
Vectores, campos vectoriales, 108, 111, 120, 125, 205, 214, 216.
Velocidad angular, vector de, 117.
Vibraciones, *véanse* Vigas, Membranas, Oscilaciones, Placas, Cuerpo rígido, movivimiento del, Sonido, Cuerda.
Vientos, 71, 122, 211, 312.
Vigas (*véanse también* Elásticas, Barras).
  Extensión de, 103-105.
  Flexión de, 26-31, 85, 123-124, 198-199, 204-205, 284-286.
  Pandeo de (columnas), 31, 123-124, 283-284.
  Ruptura de, 189-192.
Viscosidad (*véase también* Hagen-Poiseuille).
  Lineal, 94, 139, 167, 224, 288-289.
  No-Lineal, 292-293, 321, 324.
Vórtices, torbellinos, 78-81, 83-84, 140.
Vorticidad, teoremas de, en hidrodinámica, 309-313.

Young, "Módulo de Young", 105, 123, 205, 290.

EL libro de Truesdell no sólo es extraordinario por la rareza de obras sobre la historia de la mecánica, sino también por su profundidad, por el insólito conocimiento pormenorizado de los temas y por el criterio histórico que ha guiado al autor.

El propio Truesdell ha dicho: «Conozco hombres jóvenes que han leído los escritos de Gibbs, Kelvin y Cauchy, incluso de Euler y Newton, no con el propósito de adornar un trabajo propio con una referencia temprana, ni de escribir una historia, sino en búsqueda de entendimiento y método, revelados ambos en las palabras directas de gigantes, no en las traducciones hechas por enanos.» Truesdell ha intentado, y lo ha conseguido, acercarnos a los clásicos de la mecánica para encontrar un conjunto maravilloso de posibilidades inexploradas, de estímulos para la imaginación creadora, y fortalecer la idea de que en muchos aspectos los clásicos de esta disciplina son contemporáneos desconocidos.

Hay que añadir a todo esto la capacidad del autor para incluir los conceptos físico-matemáticos más rigurosos en las categorías culturales de cada época como expresión y a la vez anticipo del desarrollo de sus posibilidades. No es exageración decir que ofrecemos al lector culto que posea preparación teórica, un libro excepcional.